

Lévy の 0-1 法則のゲーム確率論的一般化について

G.Shafer, V.Vovk and A.Takemura

項目

1. ゲーム論的確率論の動向
2. Lévy の 0-1 法則
3. ゲーム論的定式化と主定理
4. まとめ

ゲーム論的確率論の動向

- 昨年の繰り返しとしとなるが，ゲーム論的確率論の動向について簡単に紹介する．
- ゲーム論的確率論は，測度論を前提としない確率論の体系としては，数学的な基礎として唯一成功をおさめていると考えられる．
- 大数の強法則，中心極限定理，などの基礎的な定理が，その枠組みの中で証明される．これらの証明の道筋は，測度論的な証明とかなり異なる場合もある．(焼き直しである場合も多くある．)

- 例えば，ゲーム論的な中心極限定理の証明を見ると，中心極限定理の証明と Black-Scholes formula の導出は本質的に同等であることがわかる．
- 連続時間確率過程については，Shafer and Vovk の 2001 年の著書では，non-standard analysis を用いており，必ずしも標準的なものとして受け容れられない面もあった．しかし，最近の 竹内・公文・竹村の原稿 (Bernoulli 掲載予定) と，それをより整備した Vovk の諸論文により，通常の解析の範囲でゲーム論的に扱うことが可能となった．

- 測度論を前提としないということは、事象として必ずしも可測なものに限る必要がないことを意味している。ゲーム論的確率論においてはあらゆる事象に対して上確率と下確率が賭けの文脈から自然に定義できる。上確率は「外測度」、下確率は「内測度」に対応していると考えられる。
- 本報告でも述べるように、測度論がどの程度不要であり、どこで必要とされるか、などが明らかになりつつある。

- ゲーム論的確率論は確率論研究者にはまだほとんど認知されていないが，確率の哲学的基礎などの興味を持つ研究者や algorithmic randomness 等の領域の研究者からはかなり認知されるようになって来ている．algorithmic randomness の研究者は日本にはほとんどいないが，海外ではそれなりに活発に研究されている．

Lévy の 0-1 法則

- Lévy の “upward theorem” (Williams “Probability with Martingales” の Sec.14.3)

\mathcal{F}_n を \mathcal{F}_∞ に増大する σ -field の族とし, ξ を可積分な確率変数とする. この時

$$E(\xi|\mathcal{F}_n) \rightarrow E(\xi|\mathcal{F}_\infty) \text{ a.s.}$$

- Lévy の 0-1 法則とは, 事象 E を \mathcal{F}_∞ 可測で, $\xi = \mathbb{I}_E$ を E の定義関数としたもの.

- Lévy 自身の説明 (1937 年の “Théorie de l’addition ...” の Section 41)

確率 0 の事象を除いて ,

$P(E|X_1, \dots, X_n)$ は (X_1, X_2, \dots) が E の元である時に 1 に収束し , そうでない時に 0 に収束する .

ゲーム論的定式化と主定理

集合 \mathcal{X} から $(-\infty, \infty]$ への関数 f に対する
superexpectation functional

$\mathcal{E} : (-\infty, \infty]^{\mathcal{X}} \rightarrow [-\infty, \infty]$ の公理:

1. $f \leq g \Rightarrow \mathcal{E}(f) \leq \mathcal{E}(g)$.
2. 正定数 $c \in (0, \infty)$ に対して $\mathcal{E}(cf) = c\mathcal{E}(f)$.
3. $\mathcal{E}(f + g) \leq \mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g)$.
4. 定数 $c \in (-\infty, \infty]$ に対して $\mathcal{E}(c) = c$.
5. 非負関数の列 f_1, f_2, \dots について
$$\mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}(f_k).$$

- 以上の公理で f はある賭の賞金表に対応し, $\mathcal{E}(f)$ は f の価格に対応すると考えればよい. E を superexpectation functionals の集合とする.
- 次に, Forecaster, Skeptic 及び Reality とよばれる三人のプレイヤーのゲームを考える. 各ラウンド n で,
 1. まず Forecaster が, superexpectation functional を指定することによっていろいろな賭の値段を定める.
 2. Skeptic は関数 (賭) f_n を選ぶ.
 3. 最後に Reality は outcome x_n を選ぶ.

Skeptic のラウンド n 終了時点の資産は $\mathcal{K}_n = f_n(x_n)$ で与えられる.

Parameters: non-empty sets $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$ and function $\mathcal{E} : p \in \cup_n \mathcal{P}_n \mapsto \mathcal{E}_p \in \mathbb{E}$

Protocol:

Skeptic announces $\mathcal{K}_0 \in \mathbb{R}$.

FOR $n = 1, 2, \dots$:

Forecaster announces $p_n \in \mathcal{P}_n$.

Skeptic announces f_n such that $\mathcal{E}_{p_n}(f_n) \leq \mathcal{K}_{n-1}$.

Reality announces $x_n \in \mathcal{X}$.

$\mathcal{K}_n := f_n(x_n)$.

END FOR

- 標本空間 $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} (\mathcal{P}_n \times \mathcal{X})$
- Ω の元 $\omega = p_1 x_1 p_2 x_2 \dots$ は Forecaster と Reality の move の無限列
- $\omega \in \Omega$ に対して $\omega^n = p_1 x_1 \dots p_n x_n$ と書く .
- $\Gamma(\omega^n) \subset \Omega$ を initial segment ω^n を共有する ω の全体

- Skeptic の戦略 Σ を固定すると, n ラウンド終了時の Skeptic の資産 \mathcal{K}_n は ω^n の関数となり, $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}^\Sigma(\omega^n)$ と書ける.

- ある戦略 Σ を用いて $\mathcal{S} = \mathcal{K}^\Sigma$ の形に表される \mathcal{S} を “game-theoretic supermartingale” とよぶ.

- $\xi : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ の時点 n での条件つき上価格を

$$\bar{\mathbb{E}}(\xi \mid \omega^n) := \inf \left\{ a \mid \exists \mathcal{S} : \mathcal{S}(\omega^n) = a \text{ and } \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(\omega) \geq \xi(\omega) \text{ for all } \omega \in \Gamma(\omega^n) \right\}$$

と定義する.

- この時, 上価格過程に関して次の収束定理が成り立つ.

定理 1 $\xi : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty]$ を下に有界な関数とする . この時 , ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{E}}(\xi \mid \omega^n) \geq \xi(\omega)$$

が成り立つ .

(証明は基本的に Doob's upcrossing lemma .)

まとめ

- ゲーム論的枠組みによって，可測性の要求無しに upward theorem が上価格過程について成り立つことが示された．
- 可測性を仮定すれば，上価格 = 下価格となり，通常の upward theorem や 0-1 法則が得られる．
- 詳しくは以下を参照してください．

Glenn Shafer, Vladimir Vovk, Akimichi Takemura. Levy's zero-one law in game-theoretic probability.
arXiv:0905.0254v1