

# Hierarchical subspace models for contingency tables

原 尚幸, 清 智也, 竹村彰通

東京大学

Sep 27, 2009

2009 年度日本数学会秋季総合分科会@大阪大学

# Contents

- 1 Introduction
- 2 Hierarchical subspace model
- 3 Ambient decomposable model
- 4 Markov basis for HSM
- 5 Numerical example
- 6 Conclusion

# Introduction

- $m$  元表の記法
  - $I := I_1 \times \cdots \times I_m$  :  $m$  元表のセルの数
  - $\mathcal{I} := [I_1] \times \cdots \times [I_m]$  : セルの集合
  - $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \cdots i_m) \in \mathcal{I}$  : セル
- $V = \mathbb{R}^I$  :  $m$  元表の集合 ( $I$  次元実ベクトル空間)
  - ※  $V$  は関数  $\psi : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$  の空間とみなせる
- $L$  : 定数関数  $\psi(\cdot) = 1$  を含む  $V$  の線形部分空間
- **log-affine モデル** :  $L$  と 1 対 1

$$\log p(\cdot) := \{\log p(\mathbf{i}), \mathbf{i} \in \mathcal{I}\} \in L$$

- $m$  元表の記法
  - $I := I_1 \times \cdots \times I_m$  :  $m$  元表のセルの数
  - $\mathcal{I} := [I_1] \times \cdots \times [I_m]$  : セルの集合
  - $\mathbf{i} = (i_1 i_2 \cdots i_m) \in \mathcal{I}$  : セル
- $V = \mathbb{R}^I$  :  $m$  元表の集合 ( $I$  次元実ベクトル空間)
  - ※  $V$  は関数  $\psi : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$  の空間とみなせる
- $L$  : 定数関数  $\psi(\cdot) = 1$  を含む  $V$  の線形部分空間
- **log-affine モデル** :  $L$  と 1 対 1

$$\log p(\cdot) := \{\log p(\mathbf{i}), \mathbf{i} \in \mathcal{I}\} \in L$$

- $L_D$  for  $D \subset [m]$  :  $D$  周辺セルのみに依存する関数の集合

$$L_D = \{\psi \in V \mid \psi(i_1, \dots, i_m) = \psi(i'_1, \dots, i'_m) \text{ if } i_\delta = i'_\delta, \forall \delta \in D\}$$

- $L_D = \mathbb{R}^{I_D}$ ,  $L_{[m]} = V$ 
  - $I_D = \prod_{\delta \in D} I_\delta$  :  $D$ -周辺セルの数

- $\Delta$  : 単体的複体
- $\text{red}\Delta$  :  $\Delta$  の 極大要素 (facet) の集合 (hypergraph)
- 階層モデル  $L_\Delta$  :  $\Delta$  と 1 対 1

$$\log p(\cdot) \in L_\Delta := \sum_{D \in \text{red}\Delta} L_D,$$

- グラフィカルモデル :  $\text{red}\Delta$  がグラフの極大クリークの集合

- $L_D$  for  $D \subset [m]$  :  $D$  周辺セルのみに依存する関数の集合

$$L_D = \{\psi \in V \mid \psi(i_1, \dots, i_m) = \psi(i'_1, \dots, i'_m) \text{ if } i_\delta = i'_\delta, \forall \delta \in D\}$$

- $L_D = \mathbb{R}^{I_D}$ ,  $L_{[m]} = V$ 
  - $I_D = \prod_{\delta \in D} I_\delta$  :  $D$ -周辺セルの数

- $\Delta$  : 単体的複体
- $\text{red}\Delta$  :  $\Delta$  の 極大要素 (facet) の集合 (hypergraph)
- 階層モデル  $L_\Delta$  :  $\Delta$  と 1 対 1

$$\log p(\cdot) \in L_\Delta := \sum_{D \in \text{red}\Delta} L_D,$$

- グラフィカルモデル :  $\text{red}\Delta$  がグラフの極大クリークの集合

## (例) 2 因子交互作用へのモデリング

- $I \times J$  の 2 元表
- 飽和モデル :  $\text{red}\Delta := \{\{1, 2\}\}$

$$L_{\{1,2\}} : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$  : free parameter
- $\phi_{ij}$  : 既知の関数

$$L : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma\phi_{ij} \subset L_{\{1,2\}}$$

例 1. uniform association model :  $\phi_{ij} = ij$

例 2. two-way change point model (Hirotsu(1997)) :

$$\phi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq I_1 < I \text{ and } j \leq J_1 < J, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$



多元表への拡張

## (例) 2 因子交互作用へのモデリング

- $I \times J$  の 2 元表
- 飽和モデル :  $\text{red}\Delta := \{\{1, 2\}\}$

$$L_{\{1,2\}} : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$  : free parameter

- $\phi_{ij}$  : 既知の関数

$$L : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma\phi_{ij} \subset L_{\{1,2\}}$$

例 1. uniform association model :  $\phi_{ij} = ij$

例 2. two-way change point model (Hirotsu(1997)) :

$$\phi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq I_1 < I \text{ and } j \leq J_1 < J, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$



多元表への拡張

## (例) 2 因子交互作用へのモデリング

- $I \times J$  の 2 元表
- 飽和モデル :  $\text{red}\Delta := \{\{1, 2\}\}$

$$L_{\{1,2\}} : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$$

- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$  : free parameter

- $\phi_{ij}$  : 既知の関数

$$L : \log p_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma\phi_{ij} \subset L_{\{1,2\}}$$

例 1. uniform association model :  $\phi_{ij} = ij$

例 2. two-way change point model (Hirotsu(1997)) :

$$\phi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leq I_1 < I \text{ and } j \leq J_1 < J, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$



多元表への拡張

## (例) 3元 Split model

- Split model (Højsgaard (2003)):  
特定の変数の水準ごとにモデルを既定

(例)  $L = L_{\{1\}}^{i_2=1} + L_{\{3\}}^{i_2=1} + L_{\{1,3\}}^{i_2=2}$

- $i_2 = 1$  slice :  $L^{i_2=1} = L_{\{1\}} + L_{\{3\}}$
  - $i_2 = 2$  slice :  $L^{i_2=2} = L_{\{1,3\}}$
- 自明に  $L \subset L_{\{1,2,3\}}$



複雑な交互作用のモデリング

## (例) 3元 Split model

- Split model (Højsgaard (2003)):  
特定の変数の水準ごとにモデルを既定

$$(例) L = L_{\{1\}}^{i_2=1} + L_{\{3\}}^{i_2=1} + L_{\{1,3\}}^{i_2=2}$$

- $i_2 = 1$  slice :  $L^{i_2=1} = L_{\{1\}} + L_{\{3\}}$
  - $i_2 = 2$  slice :  $L^{i_2=2} = L_{\{1,3\}}$
- 自明に  $L \subset L_{\{1,2,3\}}$



複雑な交互作用のモデリング

- 階層モデルの部分モデルとして hierarchical subspace model (以下 HSM) を導入
- HSM は次元の低い分割表で有用とされてきた多くの log-affine モデルにおける推測を統一的に扱うための理論的枠組を提供
- さらにそうしたモデルの高次元分割表への自然な一般化を与える
- 本講演では特に推論の局所化という観点から,
  - 尤度の分解, 最尤推定の局所計算
  - マルコフ基底の局所計算を議論
- マルコフ基底を用いた正確検定の数値例を紹介

# Hierarchical subspace model

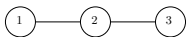
- $W_1, \dots, W_K : V$  の線形部分空間 s.t.  $W = W_1 + \dots + W_K$
- $L$  が  $\{W_j\}_{j=1}^K$  に対して等角 (*conformal*)

$$L = L \cap W = (L \cap W_1) + \dots + (L \cap W_K)$$

- $L \supset (L \cap W_1) + \dots + (L \cap W_K)$  は常に成立
- 逆は必ずしも成立しない

## (例) 3元条件付独立モデル

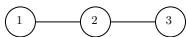
- 1  $\perp\!\!\!\perp$  3 | 2 のモデル



- $W = L_{\{1,2\}} + L_{\{2,3\}}$ ,  $W_1 := L_{\{1,2\}}$ ,  $W_2 := L_{\{2,3\}}$
- $\phi_{i_1 i_2}$ ,  $\psi_{i_2 i_3}$  は既知の関数
- ①  $L : \log p_{i_1 i_2 i_3} = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta \phi_{i_1 i_2} + \delta' \psi_{i_2 i_3}$ 
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \delta \phi_{i_1 i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta' \psi_{i_2 i_3}\}$
  - $L = (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$
- ②  $L' : \log p_{i_1 i_2 i_3} = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta(\phi_{i_1 i_2} + \psi_{i_2 i_3})$ 
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3}\}$
  - $(L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}}) = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3}$
  - $L \supset (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$

## (例) 3元条件付独立モデル

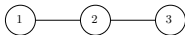
- 1  $\perp\!\!\!\perp$  3 | 2 のモデル



- $W = L_{\{1,2\}} + L_{\{2,3\}}$ ,  $W_1 := L_{\{1,2\}}$ ,  $W_2 := L_{\{2,3\}}$
- $\phi_{i_1 i_2}$ ,  $\psi_{i_2 i_3}$  は既知の関数
- ①  $L : \log p_{i_1 i_2 i_3} = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta \phi_{i_1 i_2} + \delta' \psi_{i_2 i_3}$ 
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \delta \phi_{i_1 i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta' \psi_{i_2 i_3}\}$
  - $L = (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$
- ②  $L' : \log p_{i_1 i_2 i_3} = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta(\phi_{i_1 i_2} + \psi_{i_2 i_3})$ 
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3}\}$
  - $(L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}}) = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3}$
  - $L \supset (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$

## (例) 3元条件付独立モデル

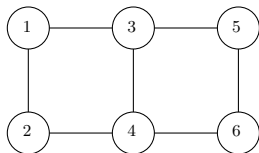
- 1  $\perp\!\!\!\perp$  3 | 2 のモデル



- $W = L_{\{1,2\}} + L_{\{2,3\}}$ ,  $W_1 := L_{\{1,2\}}$ ,  $W_2 := L_{\{2,3\}}$
- $\phi_{i_1 i_2}$ ,  $\psi_{i_2 i_3}$  は既知の関数
- ①  $L : \log p_{i_1 i_2 i_3} = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta \phi_{i_1 i_2} + \delta' \psi_{i_2 i_3}$ 
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \delta \phi_{i_1 i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3} + \delta' \psi_{i_2 i_3}\}$
  - $L = (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$  conformal!
- ②
  - $L \cap L_{\{1,2\}} = \{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2}\}$ ,  $L \cap L_{\{2,3\}} = \{\beta_{i_2} + \gamma_{i_3}\}$
  - $(L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}}) = \alpha_{i_1} + \beta_{i_2} + \gamma_{i_3}$
  - $L \supset (L \cap L_{\{1,2\}}) + (L \cap L_{\{2,3\}})$  not conformal

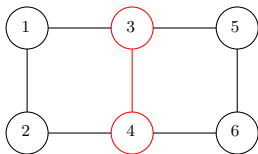
- divider  $S$  of  $\text{red}\Delta$ :  
 $\exists u, v$  s.t.  $S$  がこの 2 頂点を分離する極小の clique separator
  - $S$  :  $\text{red}\Delta$  の divider の集合
- 2 頂点  $u, v$  が強連結 (tightly connected):  
 $u, v$  を分離する divider が存在しない
- compact component :  
強連結な頂点の集合
  - $\mathcal{C}$  :  $\text{red}\Delta$  の 極大 compact component の集合

(例) divider :  $\{3, 4\}$ ,  
compact component :  $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$



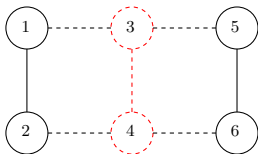
- divider  $S$  of  $\text{red}\Delta$ :  
 $\exists u, v$  s.t.  $S$  がこの 2 頂点を分離する極小の clique separator
  - $S$  :  $\text{red}\Delta$  の divider の集合
- 2 頂点  $u, v$  が強連結 (tightly connected):  
 $u, v$  を分離する divider が存在しない
- compact component :  
強連結な頂点の集合
  - $\mathcal{C}$  :  $\text{red}\Delta$  の 極大 compact component の集合

(例) divider :  $\{3, 4\}$ ,  
compact component :  $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$



- divider  $S$  of  $\text{red}\Delta$ :  
 $\exists u, v$  s.t.  $S$  がこの 2 頂点を分離する極小の clique separator
  - $S$  :  $\text{red}\Delta$  の divider の集合
- 2 頂点  $u, v$  が強連結 (tightly connected):  
 $u, v$  を分離する divider が存在しない
- compact component :  
 強連結な頂点の集合
  - $\mathcal{C}$  :  $\text{red}\Delta$  の 極大 compact component の集合

(例) divider :  $\{3, 4\}$ ,  
 compact component :  $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$

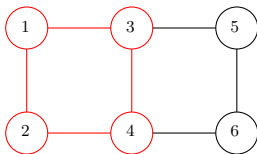


- divider  $S$  of  $\text{red}\Delta$ :  
 $\exists u, v$  s.t.  $S$  がこの 2 頂点を分離する極小の clique separator
  - $S$  :  $\text{red}\Delta$  の divider の集合
- 2 頂点  $u, v$  が強連結 (tightly connected):  
 $u, v$  を分離する divider が存在しない
- compact component :  
強連結な頂点の集合
  - $\mathcal{C}$  :  $\text{red}\Delta$  の 極大 compact component の集合

(例)

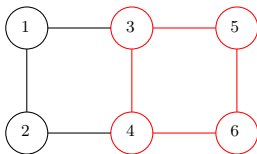
divider :  $\{3, 4\}$ ,

compact component :  $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$



- divider  $S$  of  $\text{red}\Delta$ :  
 $\exists u, v$  s.t.  $S$  がこの 2 頂点を分離する極小の clique separator
  - $S$  :  $\text{red}\Delta$  の divider の集合
- 2 頂点  $u, v$  が強連結 (tightly connected):  
 $u, v$  を分離する divider が存在しない
- compact component :  
 強連結な頂点の集合
  - $\mathcal{C}$  :  $\text{red}\Delta$  の 極大 compact component の集合

(例) divider :  $\{3, 4\}$ ,  
 compact component :  $\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}$



## Definition (hierarchical subspace model)

$L$  が階層モデル  $L_\Delta$  に対し以下の条件を満たすとする.

- ①  $L \subset L_\Delta$
- ②  $\text{red}\Delta$  の各 divider  $S \in \mathcal{S}$  に対し  $L_S \subset L$
- ③  $L$  が  $\{L_C, C \in \mathcal{C}\}$  に対して conformal

そのとき  $L$  を  $L_\Delta$  の hierarchical subspace model (HSM) と呼ぶ

(例)

- $\text{red}\Delta = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
- $L: \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta\phi_{ij} + \delta'\psi_{jk}$   
⇒  $L_\Delta$  の HSM
- $L': \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta(\phi_{ij} + \psi_{jk})$   
⇒  $L_\Delta$  の HSM ではない  
∵  $\{L_{\{1,2\}}, L_{\{2,3\}}\}$  に conformal でない  
⇒ 飽和モデルの HSM

※  $L$  に対して  $L_\Delta$  は一般には一意的でない

# Hierarchical subspace model (HSM)

## Definition (hierarchical subspace model)

$L$  が階層モデル  $L_\Delta$  に対し以下の条件を満たすとする.

- ①  $L \subset L_\Delta$
- ②  $\text{red}\Delta$  の各 divider  $S \in \mathcal{S}$  に対し  $L_S \subset L$
- ③  $L$  が  $\{L_C, C \in \mathcal{C}\}$  に対して conformal

そのとき  $L$  を  $L_\Delta$  の hierarchical subspace model (HSM) と呼ぶ

(例)

- $\text{red}\Delta = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
- $L: \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta\phi_{ij} + \delta'\psi_{jk}$   
⇒  $L_\Delta$  の HSM
- $L': \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta(\phi_{ij} + \psi_{jk})$   
⇒  $L_\Delta$  の HSM ではない  
∵  $\{L_{\{1,2\}}, L_{\{2,3\}}\}$  に conformal でない  
⇒ 飽和モデルの HSM

※  $L$  に対して  $L_\Delta$  は一般には一意的でない

## Definition (hierarchical subspace model)

$L$  が階層モデル  $L_\Delta$  に対し以下の条件を満たすとする.

- ①  $L \subset L_\Delta$
- ②  $\text{red}\Delta$  の各 divider  $S \in \mathcal{S}$  に対し  $L_S \subset L$
- ③  $L$  が  $\{L_C, C \in \mathcal{C}\}$  に対して conformal

そのとき  $L$  を  $L_\Delta$  の hierarchical subspace model (HSM) と呼ぶ

(例)

- $\text{red}\Delta = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
- $L: \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta\phi_{ij} + \delta'\psi_{jk}$   
 $\Rightarrow L_\Delta$  の HSM
- $L': \log p_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta(\phi_{ij} + \psi_{jk})$   
 $\Rightarrow L_\Delta$  の HSM ではない  
 $\because \{L_{\{1,2\}}, L_{\{2,3\}}\}$  に conformal でない  
 $\Rightarrow$  飽和モデルの HSM

※  $L$  に対して  $L_\Delta$  は一般には一意的でない

- $L : L_\Delta$  の HSM
- $\hat{p}(\mathbf{i}) : p(\mathbf{i})$  の MLE

$$\hat{p}(\mathbf{i}) = \frac{\prod_{C \in \mathcal{C}} \hat{p}(\mathbf{i}_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} \hat{p}(\mathbf{i}_S)} = \frac{\prod_{C \in \mathcal{C}} \hat{p}(\mathbf{i}_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} x(\mathbf{i}_S)/n}.$$



各 compact component  $C \in \mathcal{C}$  に対する  
周辺確率に計算を局所化

- $L_\Delta$  が小さいほど分解能が高い

→ 計算効率が高い

- $L : L_\Delta$  の HSM
- $\hat{p}(i) : p(i)$  の MLE

$$\hat{p}(i) = \frac{\prod_{C \in \mathcal{C}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} \hat{p}(i_S)} = \frac{\prod_{C \in \mathcal{C}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} x(i_S)/n}$$



各 compact component  $C \in \mathcal{C}$  に対する  
周辺確率に計算を局所化

- $L_\Delta$  が小さいほど分解能が高い  
→ 計算効率が高い

- $L$  は飽和モデル  $L_{[m]}$  の HSM
  - $L$  を HSM に含むような階層モデルは存在
- 推論の局所化の分解能の観点からすると  $L$  を HSM に含むなるべく小さい階層モデル  $L_{\Delta}$  に興味がある
- $L$  を HSM に含むような最小の分解可能モデルを導出



ambient decomposable model

- $L$  は飽和モデル  $L_{[m]}$  の HSM
  - $L$  を HSM に含むような階層モデルは存在
- 推論の局所化の分解能の観点からすると  $L$  を HSM に含むなるべく小さい階層モデル  $L_{\Delta}$  に興味がある
- $L$  を HSM に含むような最小の分解可能モデルを導出



ambient decomposable model

## Ambient decomposable model

## HSMが誘導する hypergraph (red $\Delta$ )

- $S \subset [m]$  が  $L$  の partial edge separator
  - ①  $L_S \subset L$
  - ② 互いに素な  $A_1 \cup A_2 \cup S = [m]$  が存在して,  
 $L$  が  $\{L_{A_1 \cup S}, L_{A_2 \cup S}\}$  に対して conformal
- 2頂点  $u, v$  が  $L$  上で強連結  
 $u, v$  を分離する partial edge separator が存在しない
- extended compact component (ECC)  
互いに  $L$  上で強連結な変数の集合
- $L$  が誘導する hypergraph  $\mathcal{H}$   
極大 ECC の集合族
- $L_{\mathcal{H}}$  :  $\mathcal{H}$  が誘導する階層モデル

## HSMが誘導する hypergraph (red $\Delta$ )

- $S \subset [m]$  が  $L$  の partial edge separator
  - ①  $L_S \subset L$
  - ② 互いに素な  $A_1 \cup A_2 \cup S = [m]$  が存在して,  
 $L$  が  $\{L_{A_1 \cup S}, L_{A_2 \cup S}\}$  に対して conformal
- 2頂点  $u, v$  が  $L$  上で強連結  
 $u, v$  を分離する partial edge separator が存在しない
- extended compact component (ECC)  
互いに  $L$  上で強連結な変数の集合
- $L$  が誘導する hypergraph  $\mathcal{H}$   
極大 ECC の集合族
- $L_{\mathcal{H}}$  :  $\mathcal{H}$  が誘導する階層モデル

## Theorem

$L_{\mathcal{H}}$  は  $L$  の ambient decomposable model である

- MLE

$$\hat{p}(i) = \frac{\prod_{C \in \mathcal{H}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} \hat{p}(i_S)} = \frac{\prod_{C \in \mathcal{H}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} x(i_S)/n}.$$

- $p(i_C)$  : 周辺表  $x(i_C)$  のみに依存



$\mathcal{H}$  の hyperedge (極大 ECC) まで推測が局所化

## Theorem

$L_{\mathcal{H}}$  は  $L$  の ambient decomposable model である

- MLE

$$\hat{p}(i) = \frac{\prod_{C \in \mathcal{H}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} \hat{p}(i_S)} = \frac{\prod_{C \in \mathcal{H}} \hat{p}(i_C)}{\prod_{S \in \mathcal{S}} x(i_S)/n}.$$

- $p(i_C)$  : 周辺表  $x(i_C)$  のみに依存



$\mathcal{H}$  の hyperedge (極大 ECC) まで推測が局所化

## Markov basis for HSM

- $x$  :  $m$  元分割表 ( $\prod_{j=1}^m I_j$  次元ベクトル)
- $b$  : 十分統計量
- $\exists A$  s.t.  $Ax = b$ 
  - ※  $A$  は整数行列を仮定
- $\Pr(x | b)$  : 超幾何分布  
 $\Pr(x | b)$  に基づいた検定  $\Rightarrow$  正確検定
- ファイバー  $\mathcal{F}_b$  :  $b$  を share する分割表の集合  
 $\mathcal{F}_b$  の要素の数え上げによる  $\Pr(x | b)$  の評価は非現実的



MCMC を用いたサンプリング  
(Diaconis and Sturmfels(1998))

- $x$  :  $m$  元分割表 ( $\prod_{j=1}^m I_j$  次元ベクトル)
- $b$  : 十分統計量
- $\exists A$  s.t.  $Ax = b$ 
  - ※  $A$  は整数行列を仮定
- $\Pr(x | b)$  : 超幾何分布
  - $\Pr(x | b)$  に基づいた検定  $\Rightarrow$  正確検定
- ファイバー  $\mathcal{F}_b$  :  $b$  を share する分割表の集合
  - $\mathcal{F}_b$  の要素の数え上げによる  $\Pr(x | b)$  の評価は非現実的



MCMC を用いたサンプリング  
(Diaconis and Sturmfels(1998))

- move  $z = \{z_{ij}\}$  :  
 $Az = 0$  を満たす整数配列
- $x \in \mathcal{F}_b, y := x + z, y \geq 0$   
 $Ay = A(x + z) = Ax$   
 $\Rightarrow y \in \mathcal{F}_b$
- move の足し引きによって、  
同一ファイバー上の別の表への  
状態遷移が可能

## Markov bases

要素数が 2 以上の任意のファイバー  
を連結に結ぶ move の集合

- マルコフ基底を用いたファイバー  
内の状態遷移を用いれば, MCMC  
による  $p$  値の評価が可能  
(Diaconis and Sturmfels(1998))
- 一般にはマルコフ基底の導出は  
必ずしも容易でない

- move  $z = \{z_{ij}\}$  :  
 $Az = 0$  を満たす整数配列
- $x \in \mathcal{F}_b$ ,  $y := x + z$ ,  $y \geq 0$   
 $Ay = A(x + z) = Ax$   
 $\Rightarrow y \in \mathcal{F}_b$
- move の足し引きによって、  
同一ファイバー上の別の表への  
状態遷移が可能

## Markov bases

要素数が 2 以上の任意のファイバー  
を連結に結ぶ move の集合

- マルコフ基底を用いたファイバー  
内の状態遷移を用いれば, MCMC  
による  $p$  値の評価が可能  
(Diaconis and Sturmfels(1998))
- 一般にはマルコフ基底の導出は  
必ずしも容易でない

- move  $z = \{z_{ij}\}$  :  
 $Az = 0$  を満たす整数配列
- $x \in \mathcal{F}_b$ ,  $y := x + z$ ,  $y \geq 0$   
 $Ay = A(x + z) = Ax$   
 $\Rightarrow y \in \mathcal{F}_b$
- move の足し引きによって、  
同一ファイバー上の別の表への  
状態遷移が可能

## Markov bases

要素数が 2 以上の任意のファイバー  
を連結に結ぶ move の集合

- マルコフ基底を用いたファイバー  
内の状態遷移を用いれば, MCMC  
による  $p$  値の評価が可能  
(Diaconis and Sturmfels(1998))
- 一般にはマルコフ基底の導出は  
必ずしも容易でない

- move  $z = \{z_{ij}\}$  :  
 $Az = 0$  を満たす整数配列
- $x \in \mathcal{F}_b$ ,  $y := x + z$ ,  $y \geq 0$   
 $Ay = A(x + z) = Ax$   
 $\Rightarrow y \in \mathcal{F}_b$
- move の足し引きによって、  
同一ファイバー上の別の表への  
状態遷移が可能

## Markov bases

要素数が 2 以上の任意のファイバー  
を連結に結ぶ move の集合

- マルコフ基底を用いたファイバー  
内の状態遷移を用いれば, MCMC  
による  $p$  値の評価が可能  
(Diaconis and Sturmfels(1998))
- 一般にはマルコフ基底の導出は  
必ずしも容易でない

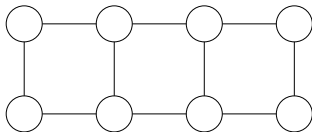
- move  $z = \{z_{ij}\}$  :  
 $Az = 0$  を満たす整数配列
- $x \in \mathcal{F}_b$ ,  $y := x + z$ ,  $y \geq 0$   
 $Ay = A(x + z) = Ax$   
 $\Rightarrow y \in \mathcal{F}_b$
- move の足し引きによって、  
同一ファイバー上の別の表への  
状態遷移が可能

## Markov bases

要素数が 2 以上の任意のファイバー  
を連結に結ぶ move の集合

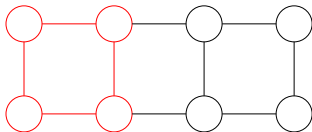
- マルコフ基底を用いたファイバー  
内の状態遷移を用いれば, MCMC  
による  $p$  値の評価が可能  
(Diaconis and Sturmfels(1998))
- 一般にはマルコフ基底の導出は  
必ずしも容易でない

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



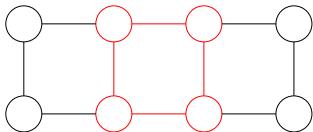
- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

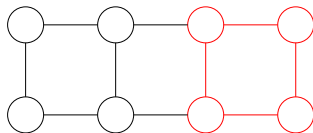
- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)

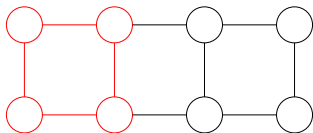
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

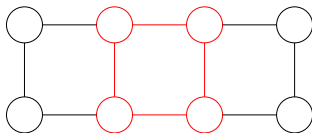
- Dobra and Sullivant (2004)

階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



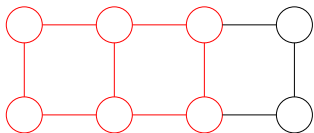
- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



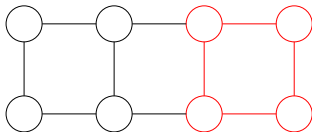
- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



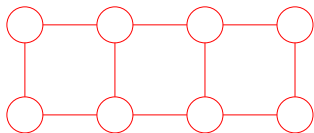
- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



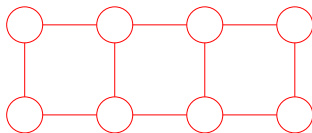
- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

- Dobra and Sullivant (2004)  
階層モデル  $L_\Delta$  の場合, 各  $C \in \mathcal{C}$  - 周辺モデル  $L_\Delta \cap L_C$  のマルコフ基底から, 全体  $L_\Delta$  のマルコフ基底が導出可能



- HSM  $L$  でも  $L \cap L_C, C \in \mathcal{H}$  (周辺モデル) のマルコフ基底から  $L$  のマルコフ基底が得られる
  - 具体的な構成法については HST(2009) を参照のこと

## Numerical example

- Woman and Mathematics (WAM) data : 6 元分割表  
New Jersey 州の高校生へのアンケート  
(Fowlkes(1988), Højsgaard(2003))
  - (1) Attendance in math lectures (attended=1, not=2)
  - (2) Sex (female=1, male=2)
  - (3) School type (suburban=1, urban=2)
  - (4) Agree in statement "I'll need mathematics in my future work"  
(agree=1, disagree=2)
  - (5) Subject preference (math-science=1, liberal arts=2)
  - (6) Future plans (college=1, job=2)

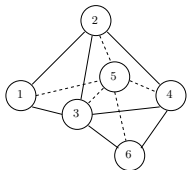
# 数値例：用いたモデル

## ① $H_1$ : 分解可能モデル

$$L_{\text{Model1}} = L_{\{1,2,3,5\}} + L_{\{2,3,4,5\}} + L_{\{3,4,5,6\}}$$

## ② $H_0$ : split モデル

$$L_{\text{Model2}} = L_{\{1,2,3,5\}} + L_{\{2,5\}}^{j_3=1} + L_{\{4,5\}}^{j_3=1} + L_{\{2,4,5\}}^{j_3=2} + L_{\{3,4,5,6\}}.$$



- |                       |                                |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1. attendance in math | 4. necessity of math in future |
| 2. sex                | 5. subject preference          |
| 3. school type        | 6. future plan                 |

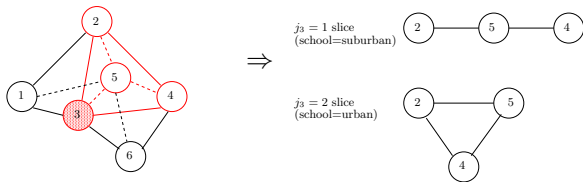
# 数値例：用いたモデル

## ① $H_1$ : 分解可能モデル

$$L_0 = L_{\{1,2,3,5\}} + L_{\{2,3,4,5\}} + L_{\{3,4,5,6\}}$$

## ② $H_0$ : split モデル

$$L_1 = L_{\{1,2,3,5\}} + L_{\{2,5\}}^{j_3=1} + L_{\{4,5\}}^{j_3=1} + L_{\{2,4,5\}}^{j_3=2} + L_{\{3,4,5,6\}}.$$



- |                       |                                |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1. attendance in math | 4. necessity of math in future |
| 2. sex                | 5. subject preference          |
| 3. school type        | 6. future plan                 |

- $\mathcal{B}_1$  :  $L_1$  のマルコフ基底

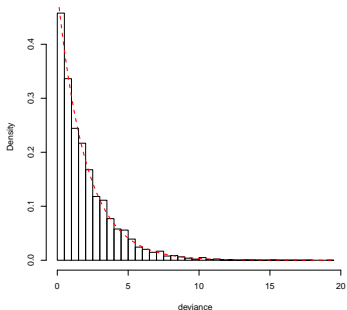
$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\{1,2,3,5\},\{2,3,4,5,6\}} \cup \mathcal{B}_{\{1,2,3,4,5\},\{3,4,5,6\}}$$

- $\mathcal{B}_0$  :  $L_0$  のマルコフ基底

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{\{1,2,5\},\{4,5,6\}}^{i_3=1} \cup \mathcal{B}_0$$

- $\mathcal{B}_C$  : 分解可能モデル  $C$  のマルコフ基底
- $\mathcal{B}_C^{i_\delta}$  :  $i_\delta$ -slice における  $\mathcal{B}_C$

- 検定統計量：尤度比検定統計量



Deviance	p-value	
	asymptotic $\chi^2_2$	MCMC
1.851	0.396	0.399±0.012

- ヒストグラム：MCMC
- 点線：漸近  $\chi^2_2$

- split モデルの帰無仮説を採択

# Conclusion





### まとめ

- hierarchical subspace model を導入
- 推論の局所化の観点から ambient decomposable model を導出
  - MLE とマルコフ基底の計算の局所化

### 今後の課題

- RC association モデルのような 2 元表の非線形モデルの多元への拡張
- extended compact component より小さい単位への局所化
- divider  $S$  に対する  $L_S \subset L$  の制約の緩和

# References

-  Hara, H., Sei, T. and Takemura, A.(2009).  
Hierarchical subspace models for contingency tables  
[arXiv:0909.4821](#)
-  Diaconis, P. and Sturmfels, B.(1998).  
Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions  
*Ann. Statist.*, 26, 363-397.
-  Malvestuto, F. M. and Moscarini, M.(2000).  
Decomposition of a hypergraph by partial-edge separators  
*Theoret. Comput. Sci.*, 237, 57–79.
-  Dobra, A. and Sullivant, S.(2004).  
A divide-and-conquer algorithm for generating Markov bases of multi-way tables  
*Comput. Statist.*, 19, 347–366.
-  Højsgaard, S.(2003).  
Split models for contingency tables  
*Computational Statistics & Data Analysis*, 42, 621–645.

Thank you for your attention!