ゲーム論的確率論の概要と最近の研究成果

竹村 彰通

東大情報理工

2010 年 3 月 1 日

目次

ゲーム論的確率論の背景

- 1930 年代のコルモゴロフによる測度論的確率論により，極限操作などの数学的操作が保証され，操作的体系としての確率論が確立した．
- 多くの分野での応用の基盤となった．
- 確率自体を「点」や「線」のように公理的に与え，その意味を問わないことが特徴

> “確率とは，ルベーグ測度である．”
> この言葉ほど確率の数学的本質を突いたものはない．伊藤清, 1944.

- フォン・ミーゼスの「コレクチーフ」の議論などは忘れ去られていった．

ゲーム論的確率論の背景

- コルモゴロフ自身は一種のためらい．Kolmogorov(1963) の一節:

  The set-theoretic axioms of probability theory, in whose formulation it was my lot to take part, allowed to eliminate most of the difficulties in constructing the mathematical apparatus appropriate for numerous applications of probabilistic methods, and so successfully, that the problem of finding the causes of the applicability of mathematical probability theory was felt by many researches to be of secondary importance.
  I have already expressed the point of view that the basis of the applicability of the mathematical theory of probability to random events of the real world is the *frequency approach to probability* in one form or another, which was so strongly advocated by von Mises.

ゲーム論的確率論の背景

- random かどうかは無限の系列を見ないとわからないのか?
- コルモゴロフ自身は Kolmogorov complexity の提唱へ
- 確率論研究者は，ほとんどすべての研究者が，
  「確率論＝測度論」という立場
- Shafer and Vovk (2001) “Probability and Finance, It’s Only a Game!” の登場
- Vovk は Kolmogorov のもとで博論を書いた最後の学生の一人

ゲーム論的確率論の背景

- ゲーム論的確率論ではゲームのみを設定する．
- ゲームのもとで，プレイヤーの確率的行動が帰結することを示す．
- 測度論無しに，大数の強法則，中心極限定理，重複対数の法則，さらに数理ファイナンスにおける価格付けの諸公式 (Black-Scholes formula) が証明される．
- 中心極限定理と Black-Scholes formula が「同値」であることも明確にわかる．

ゲーム論的確率論入門(コイン投げゲーム)

- 二人のプレイヤーの間の完全情報ゲーム
  - Skeptic (Investor) : 賭をする人
  - Reality (Market) : 賭の結果を定める人
- Skeptic → Reality → S → R → のように交互に手番
- 「Skeptic の手番 → Reality の手番」を 1 ラウンドと考える．
- ゲームのラウンドを n で表し，ゲームの繰り返しを $n = 1, 2, \ldots$ とする
- Skeptic の初期資金: $\mathcal{K}_0 = 1$ と基準化
- 各ラウンドにおいて，まず Skeptic が 自身の賭金 $M_n \in \mathbb{R}$ を明らかにする．賭金は実数とし，いくらでも小さい額の賭金が可能．負の賭金も可能．

ゲーム論的確率論入門 (コイン投げゲーム)

- それを知った上で，Reality は $x_n = 1$ (表) あるいは $x_n = -1$ (裏) を選ぶ
- Skeptic への支払い (ペイオフ) は $M_n x_n$
- Skeptic の資金の変化

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n$$

- ゲームのプロトコル:

$\mathcal{K}_0 = 1$

FOR $n = 1, 2, \ldots$

Skeptic announces $M_n \in \mathbb{R}$.

Reality announces $x_n \in \{-1, 1\}$.

$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n$.

END FOR

ゲーム論的確率論入門 (コイン投げゲーム)

- Reality は $x_n = \pm 1$ の符号を M_n の符号と逆に選ぶことができるから，Skeptic は必ず損をする．
- ところがその場合でも Reality は大数法則的に行動することを強いられる．

定理 *Skeptic* に絶対に破産しない構成的な戦略 $\mathcal{P}$ が存在し (この戦略を最初に明らかにしたとしても)，もし *Reality* が

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = 0$$

が成り立たないように行動する場合には必ず

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{K}_n = \infty$$

となる．

ゲーム論的確率論入門 (コイン投げゲーム)

- 絶対破産しない戦略の例: 常に資金の一定割合のみ賭ける戦略 (ϵ 戦略)
- ϵ 戦略の資金過程

$$\mathcal{K}_n = \prod_{i=1}^{n}(1+\epsilon x_i), \qquad \log \mathcal{K}_n = \sum_{i=1}^{n} \log(1+\epsilon x_i)$$

- $0 < \epsilon$: 小 として

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1+\epsilon x_i) \doteq \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2}\epsilon^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2}\epsilon^2 n$$
$$= n\epsilon(\bar{x}_n - \frac{1}{2}\epsilon)$$

- $\limsup_n \mathcal{K}_n = \infty \quad \text{if} \quad \limsup_n \bar{x}_n > \epsilon/2.$

ゲーム論的確率論入門 (コイン投げゲーム)

- より厳密には

$$\log(1+t) \geq t - t^2, \quad \forall t > -1/2$$

  を用いて，$\log \mathcal{K}_n$ を下からおさえればよい
- ϵ については，可算個の「口座」を組み合わせればよい.
- 戦略としては，単一の簡明な戦略のほうがわかりやすい (「計算可能性」にも関連)
- 現状で成功している口座により多くの資金を投入するのがよい?
  もっと後から成功するかも知れないから，現状で成功していない口座にも資金は残しておく?
- ちなみに，数学のような基礎分野の研究には，静的かつひろい資源配分が望ましいはず．Exploitation and exploration の dilemma．

研究成果のリスト (Tokyo Papers)[1]

http://www.probabilityandfinance.com/ に Vovk 氏が情報を集約している．簡単な解説つき!

"Tokyo papers in chronological order"

- "On a simple strategy weakly forcing the strong law of large numbers in the bounded forecasting game", Kumon and AT. (Aug05) The article constructs an explicit strategy that weakly forces the strong law of large numbers in the bounded forecasting game with rate of convergence $O(\sqrt{\log n/n})$. AISM, **60**, 801–812 (2008).
- "Game theoretic derivation of discrete distributions and discrete pricing formulas", AT and Taiji Suzuki. (Sep05) The authors illustrate the generality of discrete finite-horizon game-theoretic probability protocols. The game-theoretic framework is advantageous because no a priori probabilistic assumption is needed. *J. Japan Stat. Soc.*, **37**, 87–104 (2007).

[1]実はそれぞれの論文が出るまで時間がかかっている

研究成果のリスト

- “Capital process and optimality properties of Bayesian Skeptic in the fair and biased coin games”, Kumon, AT and Takeuchi. (Oct05) The article studies capital process behavior in the fair-coin and biased-coin games. A Bayesian strategy for Sceptic with a beta prior weakly forces the strong law of large numbers with rate of convergence $O(\sqrt{\log n/n})$. If Reality violates the law, then the exponential growth rate of the capital process is very accurately described in terms of Kullback divergence. The authors also investigate optimality properties of Bayesian strategies. *Stochastic Analysis and Applications*, **26**, 1161–1180 (2008).

研究成果のリスト

- “Game-theoretic versions of strong law of large numbers for unbounded variables”, Kumon, AT and Takeuchi. (Mar06) The authors prove several versions of the game-theoretic strong law of large numbers in the case where Reality's moves are unbounded. *Stochastics*, **79**, 449–468 (2007).
- “Implications of contrarian and one-sided strategies for the fair-coin game”, Yasunori Horikoshi and AT. (Mar07) The authors derive results on contrarian and one-sided strategies for Skeptic in the fair-coin game. For the strong law of large numbers, they prove that Skeptic can prevent the convergence from being faster than $n^{-1/2}$. They also derive a corresponding one-sided result. *Stochastic Processes and their Applications*, **118**, 2125–2142 (2008).

研究成果のリスト

- “A new formulation of asset trading games in continuous time with essential forcing of variation exponent”, Takeuchi, Kumon and AT. (Aug07) This article introduces a new formulation of continuous-time asset trading in the game-theoretic framework for probability. The market moves continuously but an investor trades at discrete times which can depend on the past path of the market. *Bernoulli*, **15**, 1243–1258 (2009).

研究成果のリスト

- "Multistep Bayesian strategy in coin-tossing games and its application to asset trading games in continuous time", Takeuchi, Kumon and AT. (Feb08) The article studies multistep Bayesian betting strategies in coin-tossing games in the framework of game-theoretic probability. By a countable mixture of these strategies, a gambler or an investor can exploit arbitrary patterns of deviations of nature's moves from independent Bernoulli trials. The authors apply their scheme to asset trading games in continuous time and derive the exponential growth rate of the investor's capital when the variation exponent of the asset price path deviates from two. To appear in *Stochastic Analysis and Applications*.

研究成果のリスト

- “The generality of the zero-one laws”, by AT, Vovk and Shafer. (Mar08) The authors prove game-theoretic generalizations of some well known zero-one laws. Their proofs make the martingales behind the laws explicit, and their results illustrate how martingale arguments can have implications going beyond measure-theoretic probability. AISM, `doi:10.1007/s10463-009-0262-0`
- “New procedures for testing whether stock price processes are martingales”, Takeuchi, AT and Kumon. (Jul09). The authors propose procedures for testing whether stock price processes are martingales based on limit order type betting strategies. With high frequency Markov type strategies they find that martingale null hypotheses are rejected for many stocks traded on the Tokyo Stock Exchange. To appear in *Computational Economics*.

研究成果のリスト

- "Sequential optimizing strategy in multi-dimensional bounded forecasting games", Kumon, AT and Takeuchi. (Nov09). The authors propose a sequential optimizing betting strategy in the multi-dimensional bounded forecasting game in the framework of game-theoretic probability. By studying the asymptotic behavior of its capital process, they prove a generalization of the strong law of large numbers. They also introduce an information criterion for selecting efficient betting items. These results are then applied to multiple asset trading strategies in discrete-time and continuous-time games. In conclusion they give numerical examples involving stock price data from the Tokyo Stock Exchange.
- "Sequential optimizing investing strategy with neural networks", Ryo Adachi and AT. `arXiv:1002.2265v1` (Feb10).

竹内グループの研究成果の要点

- 明示的かつ単一の戦略へのこだわり
- 資金過程が発散する時の発散のオーダーの評価
- その中での Kullback-Leibler 情報量の役割の明確化
- 超準解析を用いない連続過程の扱いの提唱

ゲーム論的確率論研究への動機

- 新しい定式化なので，いろいろな問題を解ける可能性がある
- そこで論文は書ける．ただし，現状では出版はトラブる．
- しかし，より原理的な興味が研究の動機となる．
- 確率論に関連する多くの分野の基礎を革新する可能性がある．

測度論不要論

- ゲーム論的確率論の議論は，結局は上価格の議論と見てもよい.
- 上価格は外測度に対応する.
- 外測度から，拡張定理 (Caratheodory's extension) を用いて，可測なものに限る議論は必要なのか?
- そもそも拡張定理は，選択公理を使っていて，非構成的である.
- 最尤推定量は可測? (誰にもわからない)
- 「外測度が 0」を示したいのであれば，拡張定理は不要.
- このあたりは Vovk, Shafer 氏と竹村の共著 ("zero-one law") でいろいろと考えている.

doubling strategy と確率の絶対連続性

- コイン投げのゲームで，もし X_n が i.i.d. Bernoulli 変数で -1 に退化していなければ，つまり $P(X_n = 1) = p > 0$ ならば，doubling strategy が成立
- ブラウン運動などの連続時間を考えると，アキレスと亀のように，無限小の時間に無限回コインをふれるので，もし doubling strategy を許すと，一瞬で Investor の勝ちになってしまう.
- $p > 0$ と $p = 0$ は確率分布としては，(一方向的に) singular だが，0 が出続けている限りは有限回では区別はつかない
- ゲーム論のプロトコルでは，Reality は意地悪く行動するから，doubling strategy は何の「矛盾」でもない!

非負 maringale と尤度比

ここでは，通常の測度論的な枠組みで,「期待値が 1 の非負マルチンゲール」と「尤度比」が同値であることを確認する．ゲーム論的な解釈は最後におこなう.

いま $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ を filtration とする．また $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ をこれらを含む最小の σ-field とする.

$\mathcal{F}$ 上の確率測度 P を一つ固定し，P に関する非負 martingale M_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ で $E(M_n) = 1, \forall n$, となるものを考える．ここで M_n を尤度比とする確率測度 Q を構成する．ただし Q は $\mathcal{F}$ 上の確率測度に拡張されている必要はなく，各 $\mathcal{F}_n$ 上の確率 Q_n の族で整合性条件

$$A \in \mathcal{F}_n \ \Rightarrow \ Q_n(A) = Q_{n+1}(A)$$

を満たす族であればよい.

非負 maringale と尤度比

さて与えられた M_n を用いて，$\mathcal{F}_n$ 上の確率測度 Q_n を

$$Q_n(A) = \int_A M_n dP, \quad A \in \mathcal{F}_n \tag{1}$$

と定義する．こうすると $Q_n(\Omega) = \int_\Omega M_n dP = E(M_n) = 1$ となり，Q_n は $\mathcal{F}_n$ 上の確率測度となる．また (1) 式は，Radon-Nikodym の定義より

$$M_n = \frac{dQ_n}{dP}$$

であり，M_n は尤度比である．また整合性条件については $A \in \mathcal{F}_n$ とすれば $A \in \mathcal{F}_{n+1}$ であり

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(A) &= \int_A M_{n+1} dP = E(I_A M_{n+1}) = E(E(I_A M_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \\ &= E(I_A E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = E(I_A M_n) = Q_n(A) \end{aligned}$$

となり，整合性条件も成立している．ただし E は P に関する期待値を表している．

非負 maringale と尤度比

逆に整合的な $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ 上の確率測度の列 $Q_1, Q_2, \ldots$ であって，各 Q_n が P に対して絶対連続であり，従って

$$M_n = \frac{dQ_n}{dP}$$

が存在するような列を考える．明らかに

$$E(M_n) = \int_\Omega \frac{dQ_n}{dP} dP = \int_\Omega dQ_n = Q_n(\Omega) = 1$$

である．さらに条件つき期待値について $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$ を示すには，任意の $A \in \mathcal{F}_n$ に対して

$$\int_A M_n dP = \int_A M_{n+1} dP$$

を示せばよいが，これは整合性条件 $Q_n(A) = Q_{n+1}(A)$ そのものである．以上より尤度比が期待値 1 の非負 martingale となることが示された．

非負 maringale と尤度比

以上で，両方向の対応が示されたので，P に関する期待値 1 の非負マルチンゲールと各 n で P に対して絶対連続な整合的な確率測度の列が同値であることが示された．

さて，ゲーム論的には，prudent な戦略に対する資金過程はゲームのリスク中立確率のもとで期待値 1 の測度論的な非負マルチンゲールである．しかし逆に，リスク中立確率のもとでの期待値 1 の測度論的な非負マルチンゲールがゲームの資金過程として実現できるかはわからない．horse race game のように「完備」なゲームならば逆が成り立つが，一般的に Skeptic の move space が制限されている場合には逆は成り立つとは限らない．そこで，問題として興味深いのは，与えられた測度論的な非負マルチンゲールに対して，それを資金過程として実現するようなゲームを設定する問題である．

例：標準正規分布のプロトコル

- 「$X_1, X_2, \ldots$ が i.i.d. で $N(0,1)$ に従う」ことに対応するゲームは何か?
- $E^{N(0,1)}$ を標準正規分布のもとでの期待値を表すとする.
- S-V の p.181 の "Generalized Coin Tossing" プロトコルを具体的に書くと次のようになる.

  $\mathcal{K}_0 = 1$
  FOR $n = 1, 2, \ldots$
  Skeptic announces any function $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  with $E^{N(0,1)}(f_n) = 0$.
  Reality announces $x_n \in \mathbb{R}$
  $\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + f_n(x_n)$.
  END FOR
- このプロトコルのもとで $x_1, x_2, \ldots$ は i.i.d. $N(0,1)$ と区別がつかないはず