管状近傍定理と Ehrhart 多項式の周辺

竹村　彰通　(東大情報理工)

キーワード: kinematic formula, Morse 理論, Steiner formula, Whitney stratified manifolds, valuation

0. はじめに

管状近傍定理は，主にユークリッド空間において，所与のコンパクト集合から一定以下の距離にある点の集合 (管状近傍) の体積を与える定理である．統計学では統計的検定の有意確率の計算に管状近傍定理が有用な場合がある．一方 Ehrhart 多項式 は，整数点 (さらには有理点) を端点とする多面体 P を正の整数倍に膨らませた時 (kP, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の，多面体に属する整数点の個数 $\#(kP)$ を与える多項式である．

筆者は，統計数理研究所の栗木哲氏とともに，管状近傍定理の統計学への応用について研究してきた．その概要は [8] で解説している．また Ehrhart 多項式は，紙屋英彦氏及び寺尾宏明氏との共同研究の対象である超平面配置理論の有限体法 ([6],[4],[5]) と密接に関連している．

以下ではまず 1 節と 2 節で，管状近傍定理及び Ehrhart 多項式について主に歴史的なことを述べる．その後 3 節で両者の関係について考察する．筆者には，Ehrhart 多項式は管状近傍定理の離散版のように思われるが，筆者はこの関係についてまだ確たる結果を得ていないため，3 節はいくつかの考察や研究課題などを述べるにとどまる．

1. 管状近傍定理

ここではユークリッド空間 $V = \mathbb{R}^d$ における管状近傍定理を説明する[1]．$M \subset V$ をコンパクトな集合とする．点 x から M までの距離を

$$\mathrm{dist}(x, M) = \min_{y \in M} \|x - y\|$$

とする．ただし右辺の距離は通常のユークリッド距離である．右辺の最小値を達成する y を x から M への射影という．M までの距離が r (≥ 0) 以下の点の集合 M_r を，M の半径 r の管状近傍 (tube) という:

$$M_r = \{x \mid \mathrm{dist}(x, M) \leq r\}.$$

[1]統計で実際に有用なのは，単位超球面上の管状近傍とその超球面体積であるが，ここでは簡単のためユークリッド空間を考える．

管状近傍の体積を r の d 次の多項式 ($d = \dim V$) として与えるものが Hotelling-Weyl の管状近傍定理 (管状近傍公式，tube formula) である．すなわち，十分小さい r に関しては，M_r の体積 $\mathrm{Vol}(M_r)$ は

$$\mathrm{Vol}(M_r) = V_d + V_{d-1} r + V_{d-2} r^2 + \cdots + V_0 r^d \tag{1}$$

と表される．V_d, V_{d-1}, V_0 はそれぞれ M の体積，M の表面積，M のオイラー標数と単位球体積の積，であることがわかる．Hotelling は統計学者であり $\dim M = 1$ の場合の定理を示した．それを聞いた H.Weyl が結果を直ちに一般次元に拡張し，両者の論文は同じ雑誌に続けて掲載されている．管状近傍定理については丹野 ([12]) の 7 章にわかりやすい説明がある．

ただしこの定理を Hotelling-Weyl の定理とよぶのは歴史的にはやや疑問があるかもしれない．管状近傍定理に現れる多項式の係数 $V_d, V_{d-1}, \ldots, V_0$ は歴史的にさまざまな名前 (quermassintegral, Lipschitz-Killing curvature, mixed volume 等) で呼ばれている．特に M が $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ に属する凸集合の時には，すでに 1840 年に J. Steiner によって本質的に同じ式が示され Steiner formula とよばれている ([10] の 4.2 節). また二つの凸集合のベクトル和 (Minkowski 和) の体積に関しては Minkowski によって mixed volume が 20 世紀はじめに定義されている ([13] の 6 章)．ただし Weyl の貢献としては，M が閉多様体 (つまり境界のない多様体) の場合には，係数は曲率テンソルのみに依存し，その意味で “intrinsic” であることを示したことにある．このことから，例えば M が 1 次元の時には，Hotelling が示したように，(1) 式の係数は M の長さのみに依存する．

さて，Minkowski 和の観点から考えると，管状近傍 M_r は M と半径 r の球体

$$B_r = \{x \mid \|x\| \le r\}$$

の Minkowski 和に他ならない．いま A_1, A_2 を $\mathbb{R}^d$ の二つの凸体とし, $q, r \ge 0$ として Minkowskip 和 $qA_1 + rA_2$ の体積を考える．この体積は q と r の斉次多項式となることが知られている:

$$\mathrm{Vol}(qA_1 + rA_2) = q^d V_d(A_1, A_2) + q^{d-1} r V_{d-1}(A_1, A_2) + \cdots + r^d V_0(A_1, A_2) \tag{2}$$

この多項式の係数 $V_i(A_1, A_2), i = 0, 1, \ldots, d$ が A_1 と A_2 の mixed volume とよばれる．任意の凸体は，多面体で中と外から無限に近似できるから，多面体について (2) 式を示せばよい．

Tube formula (1) は A_2 として球体をとった時の (2) 式の特殊な場合と見ることができる．ただし．(1) 式の M は必ずしも凸とは限らないが，(2) では通常は A_1, A_2 とも凸体を考える．

M が凸の場合には (1) 式はすべての $r \geq 0$ について成り立つが，M が凸でないと，M への射影が一意に定まらない点の存在のために (1) 式は十分小さい r のみついて成り立つ．M_r のすべての点から M への射影が一意となるような r の上限を critical radius とよぶ．critical radius は M が内側に最もまがっている点の曲率というように理解すればよい．

特異点論の観点からは，x から M への最近点が複数存在するような x の集合が興味深いと思われる．このような点の集合は topological axis, skeleton などとよばれる．最近では計算幾何学の方面では medial axis とよぶこと多いようである．

Mixed volume の考え方をさらに発展させたものとして，kinematic formula とよばれる公式が積分幾何学の方面 ([7]) で知られている．これも tube formula と基本的には同等のものである．確率論では，kinematic formula は "Euler 標数法" として 1980 年代より Robert Adler らにより研究されるようになった．Euler 標数法が tube formula と同値であることはなかなか示されなかったが，竹村・栗木 (2002) によって有限次元空間の場合の同値性が証明された．この同値性を示すために，境界が必ずしも滑らかでない多様体に対する Morse 定理が必要となった．このあたりの重要な展開は最近の Adler and Taylor の書物 (2007) にまとめられている．Adler and Taylor では，境界が必ずしもなめらかでない多様体を "Whitney stratified manifolds with convex support cones" と説明している．

2. Ehrhart 多項式

P を整数点を端点とする $\mathbb{R}^d$ 内の凸多面体とし，P を k 倍 (k: 正整数) した時の P に含まれる整数点の個数

$$f(k) = \#\{kP \cap \mathbb{Z}^d\}$$

を考える．Ehrhart は 1960 年代に $f(k)$ が k の多項式であることを示した．Ehrhart は高校の数学の先生ということである．容易にわかるように，$f(k)$ において k^d の係数は P の体積であり，また k^{d-1} の係数は P の表面積に対応している．ただし，整数格子 $\mathbb{Z}^d$ にたいして，P の各 facet がどのような角度で交わっているかにも依存している．また定数項は 1 でありこれは P のオイラー標数である．このように Ehrhart 多項式の係数の意味づけは tube formula の係数と似た意味を持っている．しかしながら，tube formula と異なり，Ehrhart 多項式の他の係数の理論的な意味はあまりよく理解されていないようである．Ehrhart 多項式については Beck and Robins(2007) の本が参考になる．

Ehrhart 多項式において興味深いのは，reciprocity law とよばれる関係であり，$f(k)$ が P の境界を含めた整数点の数を与えるのに対して，$(-1)^d f(-k)$ は多面体の内部に属する整数点の数を与える．

また，P が有理点を端点とする多面体の場合には $f(k)$ は k の quasi-polynomial となることが知られている．ここで quasi-polynomial とは係数が周期的に変化する多項式である．有理点を端点とする多面体は，整数係数の線形不等式系

$$c_1 x_1 + \cdots + c_d x_d \le b, \qquad c_1, \ldots, c_d, b \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

の積集合として表される．ここですべての不等式を等式 $(= b)$ に置き換えると，整数係数の超平面配置が得られる．そこで超平面配置において各 chamber の内部に属する点の数を数えること (“有限体法”) と，Ehrhart 多項式が密接な関係を持っていることがわかる．この時，非有界な chamber を含めて，正整数 q に対して $\mod q$ で剰余をとることとする．この時，各 chamber の内部に属する整数点の個数の和が，十分大なる q に対しては，q の quasi-polynomial になることが示される (characteristic quasi-polynomial とよぶ)．しかも characteristic quasi-polynomial の係数の周期性には，一般の Ehrhart 多項式には見られない特殊な構造が見られる．

Ehrhart 多項式において重要な reciprocity が，超平面配置の枠組みでどのような意味を持つのかはまだよくわかっていない．

3. 両者の関係に関する考察

管状近傍公式に関しては，係数の意味については理論的にはよく理解されている．しかしながら，一般の境界のある多様体が与えられた時に，tube formula の多項式の係数を具体的に求めることは困難である．係数が求まるのは，対称性の高いきれいな多様体の場合であることが多い．一方で，Ehrhart 多項式については，任意の与えられた多面体に対して Ehrhart 多項式を計算するアルゴリズムに関する研究が進展している．従って，もし Ehrhart 多項式と tube formula の間の理論的な関係が明らかにされれば，tube formula の係数を求めるアルゴリズムが得られることとなり，tube formula の有用性が増すと考えられる．

Tube formula を多面体に応用すると，さまざまな次元の多面体の「角度」(外角および内角) の和がその係数となる．この観点からは，Ehrhart 多項式から多面体の角度の情報が得られるかが問題となる．

前節で述べたように，Tube formula (1) は (2) 式の特殊な場合と見ることができる．そう考えると，(2) 式の離散版が存在するかが気になる．実は McMullen[9] は，二つの多面体の正整数倍の Minkowski 和に属する整数点

の個数について，(2) 式に対応する結果を与えている．しかし，この結果は Ehrhart 多項式ほどは注目されていないように思われる．

連続な場合の tube formula については，Morse の定理を通じて kinematic formula との同値性が成立することが理論的には重要な事実である．一方離散の世界でも discrete Morse theory が展開されている．このあたりに関する筆者の理解は不十分であるが，kinematic formula の離散版などがあり得るのかは興味をそそられる話題である．

References

[1] R. Adler and J. Taylor: *Random Fields and Geometry.* (2007), Springer, New York.

[2] M. Beck and S. Robins: *Computing the Continuous Discretely: Integer-Point Enumeration in Polyhedra.* (2007), Springer-Verlag, Berlin.

[3] Hotelling, H. (1939). Tubes and spheres in n-spaces, and a class of statistical problems. *Amer. J. Math.*, **61**, 440–460.

[4] Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura and Hiroaki Terao: Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **27** (2008), 317–330.

[5] Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura and Hiroaki Terao: Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers. *Annals of Combinatorics*, To appear.

[6] Hidehiko Kamiya, Peter Orlik, Akimichi Takemura and Hiroaki Terao: Arrangements and ranking patterns. *Annals of Combinatorics*, **10** (2006), 219–235.

[7] D. A. Klain and G-C Rota: *Introduction to Geometric Probability.* (1997), Cambridge University Press, Cambridge.

[8] 栗木 哲，竹村彰通: チューブの体積と正規確率場の最大値の分布．数学, 第 60 巻第 2 号 (2008), 134–155.

[9] P. McMullen: Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes. *Proc. London Math. Soc.*,**35** (1977), 113-135

[10] R. Schneider: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.* (1993), Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Akimichi Takemura and Satoshi Kuriki: On the equivalence of the tube and Euler characteristic methods for the distribution of the maximum of Gaussian fields over piecewise smooth domains. *Annals of Applied Probability*, **12** (2002), 768–796.

[12] 丹野修吉: 空間図形の幾何学. 1994. 培風館.

[13] R. Webster: *Convexity.* (1994), Oxford Univestiy Press, Oxford.

[14] Weyl, H. (1939). On the volume of tubes. *Amer. J. Math.*, **61**, 461–472.