管状近傍定理と Ehrhart 多項式の周辺

竹村 彰通[1]

東大情報理工

2009 年 3 月 16 日

[1]栗木哲氏，紙屋英彦氏，寺尾宏明氏との共同研究の内容にもとづいています．

目次

1. 導入と動機づけ
2. チューブ公式と kinematic formula
3. Ehrhart 多項式と超平面配置
4. 両者の関係に関する考察

導入と動機づけ

二つの多項式

- 二つの興味深い多項式: 「チューブ公式」と「Ehrhart 多項式」
- チューブ公式: うめこまれた多様体 M から一定の距離 r 以下にある点の集合（「M の回りの半径 r のチューブ」）の体積を与える公式．r の多項式となる
- Ehrhart 多項式: 整数点を端点とする多面体 (整数多面体) P を正整数 k 倍した時に，kP に含まれる整数点の数を与える公式．k の多項式となる．
- Ehrhart 多項式はチューブ公式の離散版と思われるが，両者の関係について明示的な関係は知られていないように思われる (私自身はよくわからないままの状況)．

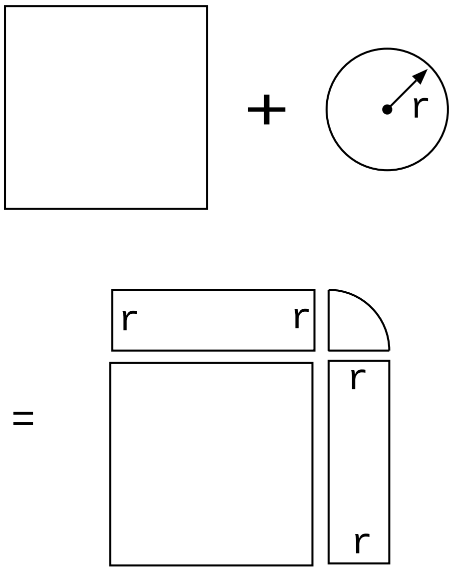
チューブ公式

- **チューブ公式**: M を $\mathbb{R}^d$ のコンパクトな部分集合とする．$B = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ を単位球体とする．この時

$$\mathrm{Vol}(M + rB) = \mathrm{Vol}(M) + r\mathrm{Vol}(\partial M) + \cdots + r^d \mathrm{Vol}(B)\chi(M)$$

  - $M + rB$ は Minkowski 和．チューブを作ることと同値 (図)．
  - 最後の項の $\chi(M)$ は M のオイラー標数．
  - その他の係数もさまざまな「曲率」であり，理論的にはよく理解されている．
  - しかし，一般の M が与えられた時に係数を数値的に評価することはやさしくない．

チューブ公式



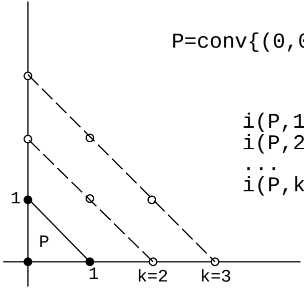
Ehrhart 多項式

- Ehrhart **多項式**: P を $\mathbb{R}^d$ の整数多面体とする．k を正整数とする．

$$\#\{kP \cap \mathbb{Z}^d\} = k^d \mathrm{Vol}(P) + \frac{1}{2} Vol(\partial P) k^{d-1} + \cdots + 1.$$

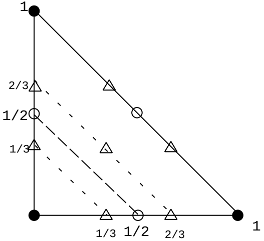
  - k^{d-1} の係数は P の通常の意味の表面積ではない．面 (facet) がどのくらい整数格子と「斜めに交わるか」にも依存する．また $1/2$ がかかっていることもやや不思議．
  - 定数項 1 はやはりオイラー標数に対応する．
  - 多面体を k 倍すると考えても，整数格子を $1/k$ 倍すると考えてもよい:
$$\#\{kP \cap \mathbb{Z}^d\} = \#\{P \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d\}.$$
  - P の端点が有理点 (すべての座標が有理数) ならば $\#\{kP \cap \mathbb{Z}^d\}$ は k の “quasi-polynomial” となる．すなわち多項式の係数が k によって周期的に変化するような関数となる．

Ehrhart 多項式




```
P=conv{(0,0), (1,0), (0,1)}

i(P,1)=3
i(P,2)=1+2+3=6
...
i(P,k)=(k+1)(k+2)/2
      =(1/2)k^2 + (3/2) k + 1
```



二つの多項式の比較

- Ehrhart 多項式の係数の意味はわかりにくい．他方，一般の P が与えられた時にその Ehrhart 多項式を求めるアルゴリズムはよく研究されている．
- チューブ公式の係数は理論的にはよく理解されている．しかし，一般の M に対して多項式を計算するのはやさしくない．
- $M + rB$ の r を変化させながら整数点の数を数えることで，体積を近似し多項式をあてはめることはできないか?
- より具体的な問: 整数多面体 P に対して
  - その Ehrhart 多項式が P をどの程度特徴づけるのか．
  - そのチューブ公式が P をどの程度特徴づけるのか．
  - 問: Ehrhart 多項式を共有するが，チューブ公式を異にする二つの多面体を示せ．
  - 問: チューブ公式を共有するが，Ehrhart 多項式を異にする二つの多面体を示せ．

チューブ公式と kinematic formula

チューブ公式関連の用語

- $M \subset \mathbb{R}^d$: **コンパクト集合**
- **点** x **から** M **までの距離**:

$$\mathrm{dist}(x, M) = \min_{y \in M} \|x - y\|$$

- **右辺の最小値を達成する** y **を** x **から** M **への射影という**:

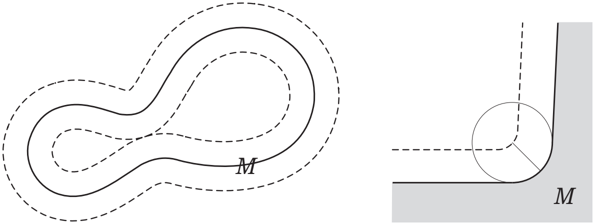
$$y = \mathrm{proj}(x).$$

- M **までの距離が** r (≥ 0) **以下の点の集合** M_r **を，** M **の半径** r **の管状近傍 (チューブ) という**:

$$M + rB = M_r = \{x \mid \mathrm{dist}(x, M) \leq r\}.$$

臨界半径

- M_r の各点から M への射影が一意となるような r の上限 r_c を臨界半径 (critical radius) という．



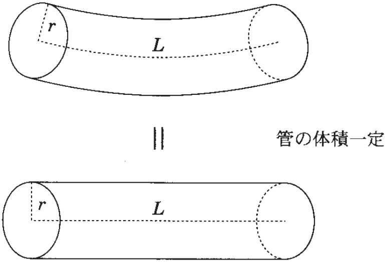
チューブ公式の簡単な説明

- いま針金でできた曲線の各点を中心として，曲線に直交する断面に半径 r の円盤をくっつける．
- このようにすると，針金を管の中心として針金からの距離が r 以下の管ができる．ホースのような形を想像してもらうとよい．
- 針金の長さを L として，この管の体積は

  $$\pi r^2 L$$

  で与えられ，長さ L と円盤の断面積 (πr^2) の積の形になる．
- これは針金がまっすぐならば当然なり立つが，針金がまがっていても，管が膨らむ部分と縮む部分の体積が相殺しあって，針金がまっすぐな場合と体積が変わらないのである．
- ただし，針金の半径 r に対して，針金の曲率が小さく，管の表面に折り目ができない範囲 の r でなければならないという制約がつく (critical radius)．

チューブ公式の簡単な説明

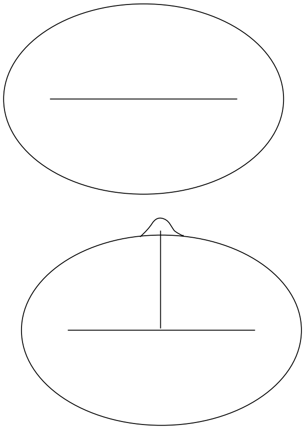


歴史的な経緯

- Steiner formula (1840)
- Mikowski による mixed volume (20 世紀はじめ)
- Hotelling (統計学者) と H.Weyl の tube formula (1939, Amer. J. Math.). Weyl の貢献としては，閉多様体の場合に，チューブ公式が "intrinsic" な幾何量によって表されることを示した点にある．
- 積分幾何学における kinematic formula
- kinematic formula と tube 公式は Morse の定理により同値なものであることがわかる．(確率場の文脈では Takemura and Kuriki (2002) によって示されたが，おそらく複数回発見されていると思われる．)

臨界半径と topological skeleton

- M への射影が 2 意以上となる点の集合は topological skeleton とよばれる．計算幾何学方面では medial axis よばれる．
- M が滑らかでも skeleton は特異性を示す．また M の微小な変化に対して skeleton は大きく変化する．



Mixed volume

- A_1, A_2 を $\mathbb{R}^d$ の二つの凸体とする．(A_2 が球体 B の場合がチューブ．)
- $q, r \geq 0$ として Minkowskip 和 $qA_1 + rA_2$ の体積を考える．
- この体積は q と r の斉次多項式となることが知られている:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(qA_1 + rA_2) = q^d V_d(A_1, A_2) + q^{d-1} r V_{d-1}(A_1, A_2) \\ + \cdots + r^d V_0(A_1, A_2) \qquad (1)\end{aligned}$$

- この多項式の係数 $V_i(A_1, A_2), i = 0, 1, \ldots, d$ が A_1 と A_2 の mixed volume とよばれる．
- 最初の項と最後の項は，それぞれ $r = 0$ あるいは $q = 0$ とおくことによって，$\mathrm{Vol}(A_1)$ あるいは $\mathrm{Vol}(A_2)$ となる．他の V_i は A_1, A_2 の両方に依存する．

Kinematic formula

- 点 x を中心とする半径 r の球 $rB+x$ を考える．
- $M \cap (rB+x)$ が空でない $\Leftrightarrow x \in M_r$. したがって

$$\mathrm{Vol}(M_r) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{M\cap(rB+x)\neq\emptyset} dx.$$

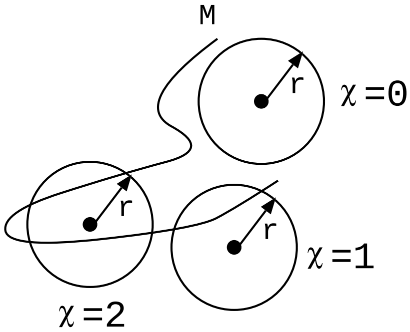
- $1_{M\cap(rB+x)\neq\emptyset}$ を $M\cap(rB+x)$ のオイラー標数 $\chi(M\cap(rB+x))$ で置き換える
- Kinematic formula:

$$\widetilde{\mathrm{Vol}}(M_r) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi(M\cap(rB+x))dx.$$

  - $M\cap(rB+x)=\emptyset$ ならば $\chi(M\cap(rB+x))=0$.
  - $M\cap(rB+x)$ が「可縮」ならば $\chi(M\cap(rB+x))=1$.

Kinematic formula と Morse 定理との関連

- x からの距離の二乗 $f_x(y) = \|x - y\|^2$ をモース関数と考える．特に $y \in M$ と制限して M 上の関数と考える．
- $x \in M_r$ に対して $\chi(M \cap (rB + x))$ は $f_x(y)$ から M への距離の停留点の曲率の符号数の和によって与えられる (Morse 定理)．
- このことを用いて，x に関する積分を $y = \mathrm{proj}(x)$ に関する積分 (と y における M の直交補空間に関する積分) に変数変換すると，チューブ公式と同値になることがわかる．



Ehrhart 多項式と超平面配置

Ehrhart 多項式と超平面配置

- $i(P,k)$ を $\mathbb{R}^d$ の整数多面体の Ehrhart 多項式とした時に，$(-1)^d i(P,-k)$ は多面体の内部に属する整数点の数を与える (reciprocity law)．
- 同様に，多面体の一部の境界を含み他の境界を含まないようにして整数点を数えても，整数点の数は k の多項式となる (包除原理)
- $\mathbb{R}^d$ の超平面配置理論を考えると，超平面によって $\mathbb{R}^d$ は "chamber" に分かれる．
- 各超平面が整数係数ベクトルによって定義されているとする．この時，どの超平面にも乗らない整数点 (すなわちいずれかの chamber の内部に属する整数点) を数えることは，「有限体法」として超平面配置の研究に有用である．
- ただし，有限体法の場合には，q を十分大きな素数とする．また整数を法 q で折り返して考える．

Characteristic quasi-polynomial

- **整数係数ベクトルで定義される超平面配置** $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\},\ H_j : c_{1j}x_1 + \cdots + c_{dj}x_d = 0,$$
$$c_{ij} \in \mathbb{Z}, \qquad (d : \text{次元})$$

- **有限体法**: $\mathcal{A}$ **を有限体上のベクトル空間** $\mathbb{F}_q^d$ **で考えたものを** $\mathcal{A}_q$ **とする．ただし，** q **は十分大きな素数とする．**
  - $\mathcal{A}_q$ **の補集合**: $M(\mathcal{A}_q) = \mathbb{F}_q^d \setminus \cup_i H_i$
  - **事実**: **十分大きい素数** q **に対して** $\mathcal{A}$ **の** characteristic polynmial $\chi(\mathcal{A}, t)$ **の** $t = q$ **での値は** $M(\mathcal{A}_q)$ **の要素数に一致する**:

$$\chi(\mathcal{A}, q) = |M(\mathcal{A}_q)|$$

Characteristic quasi-polynomial

- **問**: $\chi(A, t)$ を合成数 q で評価するとどうなるか.
- q が合成数でも "超平面" を

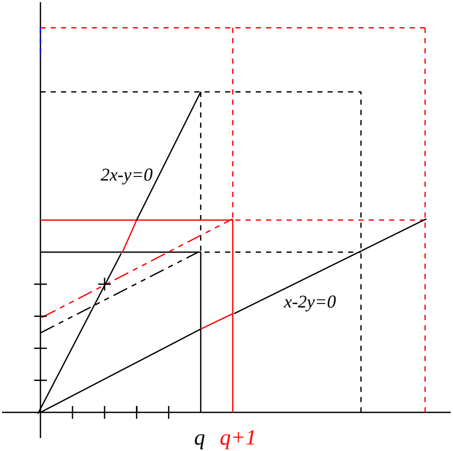
$$H_{j,q} : c_{1j}x_1 + \cdots + c_{dj}x_d \equiv 0 \pmod{q}$$

で定義し，$\mathcal{A}_q$ の補集合の点の数を数えることができる．これらは一致するか? $\Rightarrow$ 一致しない!

- しかし $|M(\mathcal{A}_q)|$ が q の quasi-polynomial になることを示すことができる．

$\Rightarrow$ "characteristic quasi-polynomial" (H.Kamiya, A.Takemura and H.Terao. Journal of Algebraic Combinatorics, 2008.)

Characteristic quasi-polynomial



- しかも，超平面配置にともなう characteristic quasi-polynomial については，一般の多面体の Ehrhart quasi-polynomial には見られないいくつかの特殊な性質が見られる．

両者の関係に関する考察

Mixed volume 関連

- 二つの整数多面体の Minkowski 和で定義される整数多面体について，mixed volume のような公式が成り立つか?
- P. McMullen, *Proc. London Math. Soc.*,(1977), の結果によると，例えば次のような結果が成り立つ．
- $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ を整数多面体とし，k, h を正整数とする．この時 $\#\big((kP + hQ) \cap \mathbb{Z}^d\big)$ は k, h について d 次の斉次多項式である．
- この結果は Ehrhart 多項式ほどは注目されていない．

モース定理関連

- 連続の世界では，チューブ公式と kinematic formula がモースの定理を通じて同値であった．離散の世界では?
  - 離散チューブは，統計方面で Wynn, Naiman などによって定義されている．
  - 離散の kinematic formula は Klain and Rota の本などで説明されている．
  - Discrete Morse Theory の分野も発展している．
  - これらの関係は?