# 0-1 法則のゲーム論的一般化

A.Takemura, V.Vovk and G.Shafer

# 項目

1. ゲーム論的確率論の動向
2. 0-1 法則の通常の証明とよりゲーム論的な説明
3. 定式化といくつかの定理

# ゲーム論的確率論の動向

- ゲーム論的確率論は Shafer and Vovk の 2001 年の著書 “Probability and Finance: It’s Only a Game!” によって導入された確率論の体系である．
- 測度論を前提としない確率論の体系としては，数学的な基礎として唯一成功をおさめていると考えられる．
- 大数の強法則，中心極限定理，などの基礎的な定理が，その枠組みの中で証明される．これらの証明の道筋は，測度論的な証明とかなり異なる場合もある．(焼き直しである場合も多くある．)

- 例えば，ゲーム論的な中心極限定理の証明を見ると，中心極限定理の証明と Black-Scholes formula の導出は本質的に同等であることがわかる．

- 連続時間確率過程については，Shafer and Vovk の 2001 年 の著書では，non-standard analysis を用いており，必ずしも標準的なものとして受け容れられない面もあった．しかし，最近の 竹内・公文・竹村の原稿とそれをより整備した Vovk の諸論文により，通常の解析の範囲でゲーム論的に扱うことが可能となった．

- 測度論を前提としないということは，事象として必ずしも可測なものに限る必要がないことを意味している．ゲーム論的確率論においてはあらゆる事象に対して上確率と下確率が賭けの文脈から自然に定義できる．上確率は「外測度」，下確率は「内測度」に対応していると考えられる．

- ゲーム論的確率論は確率論研究者にはまだほとんど認知されていないが，確率の哲学的基礎などの興味を持つ研究者や algorithmic randomness 等の領域の研究者からはかなり認知されるようになって来ている．

# 0-1 法則の通常の証明とよりゲーム論的な説明

ここでは主にコルモゴロフの 0-1 法則について，ゲーム論的な考え方を述べる．

- $x_n,\ n = 1, 2, \ldots$ を「実現値」の列とする．(i.i.d. 確率変数の実現値の列を念頭におく．)
- 実現値の無限列の集合 $\Omega^\infty = \{x_1 x_2 \ldots\}$ を標本空間とする．$\Omega^\infty$ の部分集合 $E$ を事象とよぶ．
- $E \subset \Omega^\infty$ が tail event:

$$x_1 \ldots x_N x_{N+1} \cdots \in E \ \Leftrightarrow\ \forall N \ \ {*}\cdots{*}x_{N+1} \cdots \in E.$$

- 任意の事象 $E \subset \Omega^\infty$ に対して，その上確率が $1$ より小 $(\bar{P}(E) < 1)$ であることを次のように説明する．
  - 賭をする人のある戦略 $\mathcal{P}$ が存在して，初期資金 $\delta < 1$ から出発し，その戦略を用いれば実現値の列によらず決して破産することがなく，かつ時点 $n$ での資金 $\mathcal{K}_n^{\mathcal{P}}$ について

$$\liminf_n \mathcal{K}_n^{\mathcal{P}}(\xi) \geq 1 \quad \forall \xi \in E.$$

    である．つまり $E$ が起きた時には $\delta$ 円を $1$ 円以上に増加させることができる．
  - $E$ が起きた時に $1$ 円を払いもどしてくれるクジが $\delta$ 円 $(< 1)$ で販売されていると考えてもよい．

- この時次のような議論ができる．

| |
|---|
| $E$ を tail event とする．$\bar{P}(E) < 1$ ならば $\bar{P}(E) = 0$． |

**“証明”**　$E$ が起こったとする．初期資金 $\delta = 1$ で出発して資金が $1 + \epsilon$ に増加するまで待つ．その時点で $\epsilon$ を貯金する．そして時刻をリセットして再度初期資金 $1$ から始める．$E$ が tail event であるとは，時刻をリセットしてもゲームの初期時点と同等であると理解できる．従って，再度初期資金 $1$ が $1 + \epsilon$ に増える時がくる．そのようにして $\epsilon$ づつ貯金していけば，やがて資金が無限に増大する．　$\square$

($\bar{P}(E) = 0$ とは $E$ が起きた時に無制限に資金を増やせることと同値であることに注意する．)

<u>測度論的な述べ方</u>: $X_1, X_2, \ldots$ を独立確率変数の列とする．もし $E$ が tail event ならば $P(E) = 0$ or $1$ である．

**証明**

- $E$ を $E_n \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ で近似する．
- $E$ は tail event であるから, $E$ は $E_n$ と独立であり $P(E \cap E_n) = P(E) \times P(E_n)$ が成り立つ．
- $n \to \infty$ とすることにより $P(E) = P(E)^2$．従って $P(E) = 0$ or $1$.

(この証明は Kolmogorov の 1933 年の Grundbegreffe にあり，多くの教科書に書かれているが，人工的に思われる．)

# 定式化といつくかの定理

独立確率変数列に対応するものとして，ゲームのプロトコル (“Independently Priced Trials”) を次のように定式化する:

**Parameters:** 集合 $\Omega$，及び $\Omega$ 上の実数値関数からなる “coherent cone” の列 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$.

**Protocol:**

$\mathcal{K}_0 := 1$.

FOR $n = 1, 2, \ldots$:

Skeptic announces $F_n \in \mathcal{F}_n$.

Reality announces $\omega_n \in \Omega$.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + F_n(\omega_n).$$

**END FOR**

**ただし，$\Omega$ 上の実数値関数からなる “coherent cone” $\mathcal{F}$ とは，次の 3 つの性質を満たすような実数値関数の集合である．**

1. **If $F_1 \in \mathcal{F}$ and $F_2 \in \mathcal{F}$, then $F_1 + F_2 \in \mathcal{F}$.**
2. **If $c \geq 0$ and $F \in \mathcal{F}$, then $cF \in \mathcal{F}$.**
3. **There is no $F \in \mathcal{F}$ such that $F(\omega) > 0$ for all $\omega \in \Omega$.**

任意の $E \subset \Omega^\infty$ の上確率を

$$\bar{P}(E) := \inf\Big\{\epsilon > 0 \mid \text{Skeptic の破産しない戦略が存在して}$$

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \mathcal{K}_n(\omega_1, \ldots \omega_n) \geq 1/\epsilon \quad \text{for all } \omega_1\omega_2 \ldots \in E\Big\},$$

と定義する．下確率は $\underline{P}(E) = 1 - \bar{P}(E^C)$ と定義する．
以上の準備のもとで次の定理が成り立つ．

**定理 1** Independently Priced Trials において $\boldsymbol{E}$ が tail event ならば，$\boldsymbol{E}$ の上確率と下確率について，次の 3 つの場合しかあり得ない．

i) $\mathbf{1} = \bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E}) = \underline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E})$,

ii) $\mathbf{1} = \bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E})$ かつ $\mathbf{0} = \underline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E})$,

iii) $\mathbf{0} = \bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E}) = \underline{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E})$.

**以上の定理は，独立確率変数列に対応するものであるが，次に i.i.d. 確率変数列に対応する定理を与える．**

"Identically Priced Trials"

**Parameters:** 集合 $\Omega$，及び $\Omega$ 上の実数値関数からなる
<u>単一の</u> "coherent cone" $\mathcal{F}$

**Protocol:**

$\mathcal{K}_0 := 1.$

FOR $n = 1, 2, \ldots$:

Skeptic announces $F_n \in \mathcal{F}$.

Reality announces $\omega_n \in \Omega$.

$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + F_n(\omega_n)$.

END FOR

**$E$ が invariant とは**

$$\boldsymbol{x_1 x_2 \cdots \in E \quad \Leftrightarrow \quad * x_1 x_2 \cdots \in E}$$

**を言う.**

**この時次の定理が成り立つ.**

**定理 2** Identically Priced Trials において $\boldsymbol{E}$ が invariant ならば, $\boldsymbol{E}$ の上確率ついて $\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$ or $\boldsymbol{1}$.

## まとめ

- ゲーム論的枠組みによって，可測性の要求無しに 0-1 法則が定式化できることを示した．
- 可測性を仮定すれば，上確率＝下確率となり，通常の 0-1 法則が得られる．
- 詳しくは以下を参照してください．

Akimichi Takemura, Vladimir Vovk and Glenn Shafer. The game-theoretic martingales behind the zero-one laws. `arXiv:0803.3679v1`. 2008