

統計数学における計算代数的方法

東京大学大学院情報理工学系研究科

竹村 彰通

2006年9月20日

日本数学会秋季総合分科会

項目

1. 前置き
2. 2元分割表と3元分割表
3. マルコフ基底とグレブナー基底
4. トーリックイデアルの生成系の極小性と対称性
5. 配置の正規性と sequential importance sampling
6. その他の話題

1. 前置き

- 謝辞
- 「統計数学」は統計に用いられる数学．使える数学は何でも使う．統計数学をひとつの独立した分野と考えるのは閉鎖的．
- 代数的方法も統計学でさまざまな形で使われて来た．伝統的には例えば統計的決定理論における変換群論の利用．
- しかし，最近 10 年間の「計算代数統計」は双方向性，多分野性，複合性がある．

- **計算** (応用) と **理論** が車の両輪として発展
 - 「計算できる代数」がさまざまな分野で応用される中で，統計の問題も扱われてきた．グレブナー基底をキーワードとして具体的な問題に対して具体的な答を出してくれる代数学．
 - 統計で扱われている問題や概念が，代数の理論的観点からも新たな視点を与える．
- 現在急速に発展しており解ける問題が多い．敷居が低い (含筆者!!) ．

- 日比 (編) 「グレブナー基底の^{いま}現在」参照 ．



2. 2元分割表と3元分割表

- 分割表の問題は計算代数統計の契機となったものである．代数的にも多くの具体例を提供している．
- 説明のため2元分割表をまず扱うが，3元以上の場合に興味がある．
- 特に3元分割表の「無3因子交互作用モデル」から非常に難しくなる．
- 4元以上ではほとんどのモデルが難しい．

- 分割表: 複数の特性値 (変数) に注目して観測値の頻度をまとめた表

Table 1: 成績の例

代数 \ 統計	優	良	可	計
優	7	5	1	13
良	5	10	6	21
可	2	6	8	16
計	14	21	15	50

これは 3×3 の 2 元分割表

- $I \times J$ の 2 元分割表

要因 1 \ 要因 2	1	...	J	行和
1	x_{11}	...	x_{1J}	x_{1+}
\vdots		...		\vdots
I	x_{I1}	...	x_{IJ}	x_{I+}
列和	x_{+1}	...	x_{+J}	n

- x_{i+} , x_{+j} : 周辺頻度, n : 総頻度

- 通常の関心: 独立性の仮説

$$H_0 : p_{ij} = \alpha_i \beta_j, \quad \forall i, j \quad (1)$$

- p_{ij} は個々のセルの同時確率 .
 $\alpha_i = p_{i+}, \beta_j = p_{+j}$ は周辺確率
- 検定: 観測された頻度と「期待頻度」の差を評価

- 期待頻度: 列及び行を比例的 (13 : 21 : 16 および 14 : 21 : 15) に配分 $\hat{x}_{ij} = x_{i+}x_{+j}/n$.

Table 2: 期待頻度

代数 \ 統計	優	良	可	計
優	3.64	5.46	3.9	13
良	5.88	8.82	6.3	21
可	4.48	6.72	4.8	16
計	14	21	15	50

- ピアソン χ^2 統計量

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i,j} \frac{(\text{観測頻度} - \text{期待頻度})^2}{\text{期待頻度}} \\ &= \frac{(7 - 3.64)^2}{3.64} + \dots + \frac{(8 - 4.8)^2}{4.8} = 3.36\end{aligned}$$

- この値が相対的に大きい場合には，帰無仮説 H_0 を棄却
- **正確検定**: 周辺頻度を共有する表の集合上で，超幾何分布に基づいて，乖離を評価

[16:25]

- 周辺頻度: $b = (13, 21, 16, 14, 21, 15)^t$
- 観測頻度: $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33})^t = (7, 5, \dots, 8)^t$
- 「配置」

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 \otimes 1_3^t \\ 1_3^t \otimes E_3 \end{pmatrix}$$

(ただし E_k :単位行列, 1_k :1のみからなるベクトル)

- 周辺頻度と同時頻度の関係

$$b = Ax$$

- **ファイバー**: 周辺頻度を共有する分割表の集合

$$\mathcal{F}_b = \{x \in \mathbb{N}^{I \times J} \mid b = Ax\}, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$$

- 上の例では $|\mathcal{F}_b| = 10310$. 表が大きくなると急激に要素数が増えるので, 列挙は困難となる .

ファイバーからサンプリングしたい

- **マルコフ連鎖**: ファイバーの中を動き回る
- basic move: 次の形の表 z を無作為に選んで加える .

$$\begin{array}{cc}
 & j & j' \\
 i & \boxed{\begin{array}{cc} +1 & -1 \end{array}} \\
 i' & \boxed{\begin{array}{cc} -1 & +1 \end{array}}
 \end{array}$$

- $0 = Az$: 周辺頻度が不変
- 加えた際, 負が出たらやり直す .
- **疑問**: この形の move ですべてのファイバーをくまなく動き回ることができるか?
- 2元表の場合は, I, J に依存せず, OK!

3 元表の場合

- 例えば，代数，統計，幾何の 3 科目の成績の $I \times J \times K$ 分割表

x_{111}	...	x_{11K}		...	x_{I11}	...	x_{I1K}
⋮		⋮			⋮		⋮
x_{1J1}	...	x_{1JK}			x_{IJ1}	...	x_{IJK}

- ここでは 2 次元の周辺頻度のみに注目

$$x_{ij+} = \sum_k x_{ijk}, \quad (x_{i+k}, x_{+jk} \text{ も同様に定義})$$

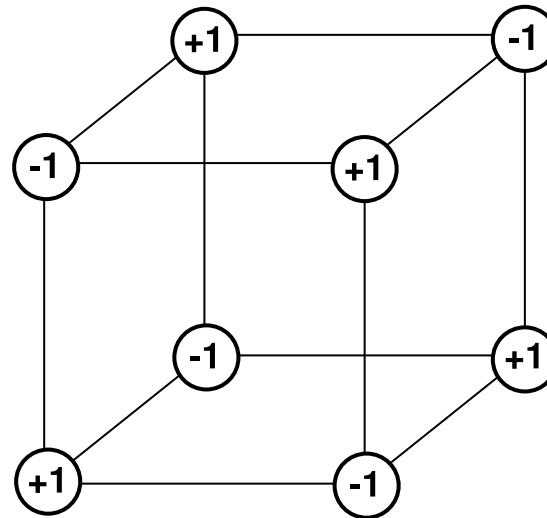
- 観測された分割表データ $x^o = \{x_{ijk}^o\}$ とすべての2次元周辺頻度を共有するファイバー (縦, 横, 高さ方向の線和をすべて共有する3元分割表の集合)

$$\mathcal{F}_b = \{x = (x_{ijk}) \mid x_{ijk} \in \mathbb{N}, x_{ij+} = x_{ij+}^o, \\ x_{i+k} = x_{i+k}^o, x_{+jk} = x_{+jk}^o, \forall i, \forall j, \forall k\}$$

の構造は?

(I, J, K が大きくなると) 驚くほど困難

- この場合の basic move



- しかしこれだけでは連結にならないファイバーがある .

- $I = J = K = 3$ の例

$$\mathcal{F} = \{x = (x_{ijk}) \mid x_{ijk} \in \mathbb{N},$$

$$a = x_{ij+} = x_{i+k} = x_{+jk}, 1 \leq i, j, k \leq 3\}$$

- このファイバーの元

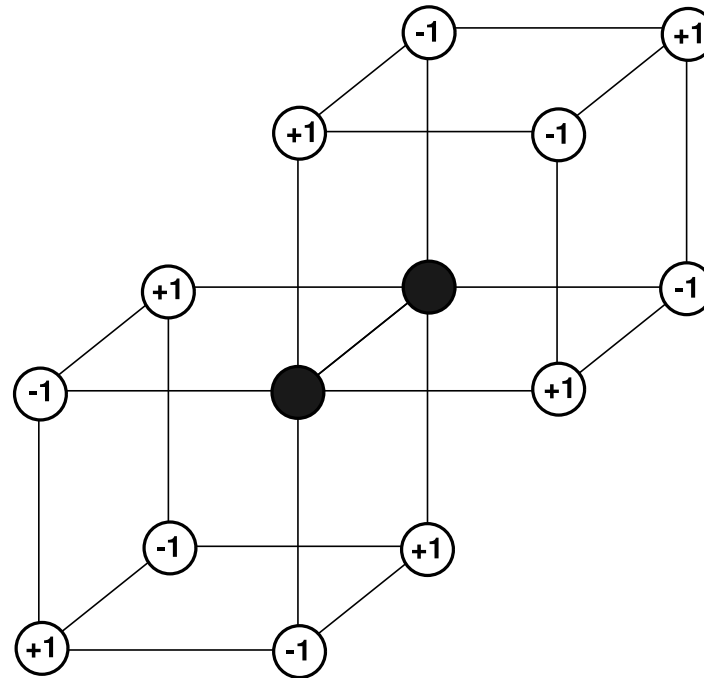
a	0	0
0	a	0
0	0	a

0	a	0
0	0	a
a	0	0

0	0	a
a	0	0
0	a	0

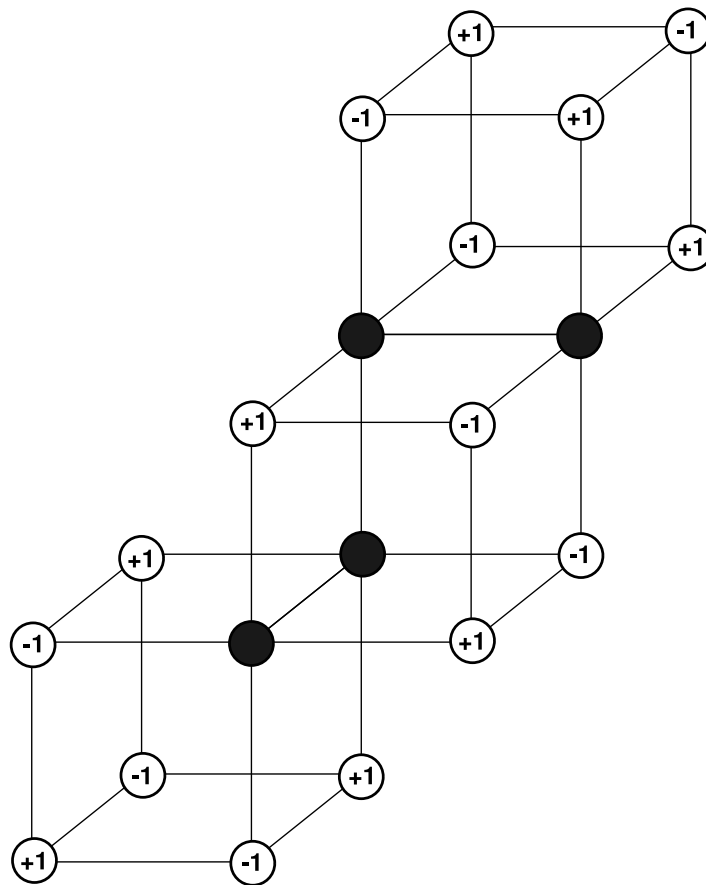
は孤立している .

- $3 \times 3 \times 3$ の場合には「6 次の move」



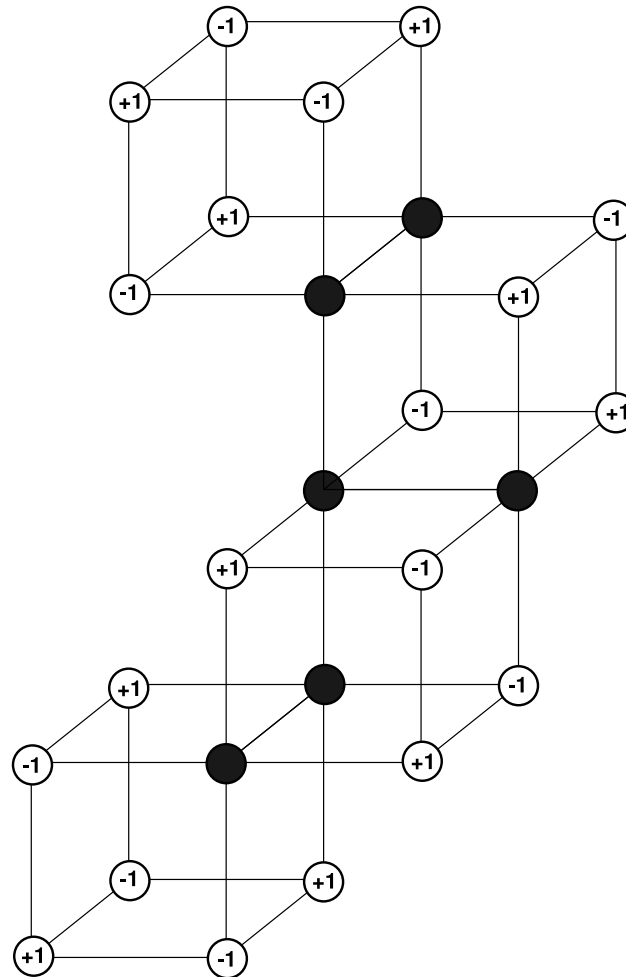
も使えばすべてのファイバーは連結となる .

- $3 \times 3 \times 4$ になると 8 次の move



が必要となる。

- $3 \times 3 \times 5$ になると 10 次の move



が必要となる．しかももう逃げられない！

- $3 \times 3 \times K, K \geq 5$, に対しては上の 10 次の move まで考えるとすべてのファイバーが連結となる
- しかし, I と J も増加させれば, ファイバーの連結性を確保するためには, 際限なく複雑な move が必要となる. 全貌の解明は非常に困難.

- 3元表の場合の行列表記と対応する確率モデル
 - 周辺頻度 b に対して

$$\mathcal{F}_b = \{x \in \mathbb{N}^{I \times J \times K} \mid b = Ax\}$$

$$A = \begin{pmatrix} E_I \otimes E_J \otimes \mathbf{1}_K^t \\ E_I \otimes \mathbf{1}_J^t \otimes E_K \\ \mathbf{1}_I^t \otimes E_J \otimes E_K \end{pmatrix}$$

- 「無3因子交互作用モデル」:

$$p_{ijk} = \alpha_{ij} \beta_{ik} \gamma_{jk}, \quad \forall i, j, k$$

3. マルコフ基底とグレブナー基底

定式化

- $A: d \times q$ の整数行列「配置」．簡単のため要素は非負整数とする． A の列 (セル) の集合を \mathcal{I} と表す．
- A の行空間に $(1, \dots, 1)$ が含まれることも仮定する．
- ファイバー:

$$\mathcal{F}_b = \{x \in \mathbb{N}^q \mid b = Ax\}$$

- move: A の核に属する (負の要素を含む) 整数ベクトル z

[16:35]

$$0 = Az$$

- z が move であれば

$$A(x + z) = Ax$$

となり, $x + z$ に負の要素が現れない限り, 同じファイバーの中を移動.

- move z の要素を正部分と負部分に分け,
 $z = z^+ - z^-$ と書く. z^+ と z^- は同じファイバーに属する.
- move の有限集合 $\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_L\}$ が誘導するグラフ

– $x, y \in \mathcal{F}_b$ に対して $z \in \mathcal{B}$ が存在して

$$x = y + z \text{ or } y = x + z$$

となる時, つまり互いに $\pm z$ で移れる時, x と y が辺で結ばれていると考える.

- この時各 \mathcal{F}_b を (無向) グラフと考えることができる.
- もしすべてのファイバーが連結なグラフとなれば, \mathcal{B} の要素の足し引きによってすべてのファイバーの中をくまなく動き回ることができる.

- マルコフ基底の定義

move の有限集合 \mathcal{B} がマルコフ基底であるとは \mathcal{B} によってすべてのファイバーが連結となることである.

- **基本的な事実** (Diaconis and Sturmfels (1998))

マルコフ基底は配置 A にともなうトーリックイデアル I_A の生成系に他ならない

- k : 適当な体
- $k(p_1, \dots, p_q)$: 列に対応する多項式環
- $k(v_1, \dots, v_d)$: 行に対応する多項式環
- $\pi_A: p_i \mapsto \prod_{j=1}^d v_j^{a_{ji}}$: 準同型写像
- $I_A = \text{Ker}(\pi_A)$: トーリックイデアル

確率モデルを代数的に眺める

- 2元表の独立モデルの例 (再掲)

$$p_{ij} = \alpha_i \beta_j$$

- 頻度ベクトル $x = (x_{11}, \dots, x_{IJ})$ を観測する同時確率

$$(\text{多項係数}) \times \prod_{i,j} p_{ij}^{x_{ij}}$$

- ここで $\{p_{ij}\}$ を不定元の集合, x_{ij} を冪と見ると,
 $p^x = \prod_{i,j} p_{ij}^{x_{ij}}$ は単項式になっている.
- $k(\{p_{ij}\})$: $\{p_{ij}\}$ を不定元とする多項式環.

- また $p_{ij} = \alpha_i \beta_j$ において $\{\alpha_i\} \cup \{\beta_j\}$ も不定元の集合と見る ,
- 多項式環の準同型 $\pi : k(\{p_{ij}\}) \rightarrow k(\{\alpha_i\} \cup \{\beta_j\})$ を

$$\pi : p_{ij} \mapsto \alpha_i \beta_j$$

によって定義 .

- $I_A = \text{Ker}(\pi)$: 配置

$$A = \begin{pmatrix} E_I \otimes 1_J^t \\ 1_I^t \otimes E_J \end{pmatrix}$$

にともなうトーリックイデアル .

- 例

$$\begin{aligned}
 \pi(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}) &= \pi(p_{11})\pi(p_{22}) - \pi(p_{12})\pi(p_{21}) \\
 &= \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- 同様に $p_{ij}p_{i'j'} - p_{ij'}p_{i'j} \in I_A$ となるが, これは

basic move $\begin{matrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{matrix}$ に対応している.

- $p_{ij} = \alpha_i\beta_j$ という「パラメトリック表示」から, $\alpha_i,$
 β_j を掃き出して消去し, 陰関数表示したとも思える.
 (消去イデアル)

一般的に

- トーリックイデアル I_A は 2 項式からなる生成系を持つ．すなわち I_A は $p^y - p^x$ の形の有限個の 2 項式で生成される．
- $p^y - p^x$ が I_A に属することと $z = y - x = z^+ - z^-$ が move であることは同値である．
- この同値性から，若干の議論を経て，基本的な事実，すなわち，move の有限集合 $\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_L\}$ がマルコフ基底となることと対応する 2 項式の集合 $\{p^{z_1^+} - p^{z_1^-}, \dots, p^{z_L^+} - p^{z_L^-}\}$ が I_A の生成系であることの同値性，が示される．

消去イデアルとグレブナー基底 (計算の基本)

定理: A の各列 $p_i \in \mathcal{I}$ に対応して 2 項式 $-\pi_A(p_i) + p_i$ を作り, これらで生成される $k[p, v]$ 上のイデアルを $I_A^* = \langle -\pi_A(p_i) + p_i, i \in \mathcal{I} \rangle \subset k[p, v]$ とおく. このとき $I_A = I_A^* \cap k[p]$ が成り立つ.

p 上の任意の単項式順序について, それを拡張した $v \succ p$ となる $p \cup v$ 上の任意の消去順序を定義し, この消去順序に対する I_A^* の被約グレブナー基底を G^* と書けば, $G = G^* \cap k[p]$ は, p 上の単項式順序に対する I_A の被約グレブナー基底となる.

[16:45]

3 × 3 × 3 の場合のグレブナー基底 (逆辞書式順序)

basic move, 6 次の move の他に以下の move を含む

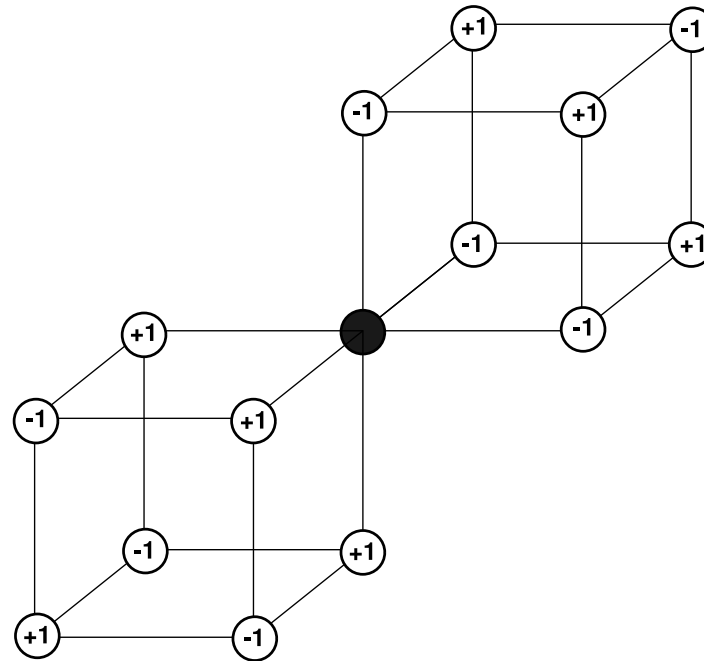
- 28 個の 7 次の move

0	0	0	+1	0	-1	-1	0	+1
0	-1	+1	-1	+1	0	+1	0	-1
0	+1	-1	0	-1	+1	0	0	0

- 1 個の 9 次の move

-2	+1	+1	+1	0	-1	+1	-1	0
+1	0	-1	0	0	0	-1	0	+1
+1	-1	0	-1	0	+1	0	+1	-1

- 7 次の move の図示



- 7 次と 9 次の move は生成系としては不要 . 1 個のゼロはぶつけて壊せる .
- 実は , $3 \times 3 \times 3$ の場合 , basic move と 6 次の move で一意極小生成系をなすことがわかる .

4. トーリックイデアルの生成系の極小性と対称性

- **動機:** 被約グレブナー基底が生成系としては極小でないこと, またもとの問題の対称性を反映していないこと, がある.
- z が move の時 $-z$ も move である. 生成系の極小性を考える時には move の符号は無視し, z と $-z$ を同一視する.
- I_A に属する2項式と move の同値性により, 以下ではトーリックイデアル I_A の生成系を move の集合として表す.

- 生成系 $\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_L\}$ はそのどの真部分集合も生成系とならない時**極小**であるという。
- z が **indispensable** (必須) であることを, z (あるいは $-z$) がすべての生成系に含まれなければならないことと定義する。
- 定義より, 極小な生成系が一意的であることと, indispensable move の集合が生成系を成すことは同値。

- z が indispensable であることと, ファイバー \mathcal{F}_{Az^+} が $\{z^+, z^-\}$ の 2 要素集合となること

$$\mathcal{F}_{Az^+} = \{z^+, z^-\}$$

は同値 .

- i) もし \mathcal{F}_{Az^+} が 2 要素ならば, \mathcal{F}_{Az^+} を連結にするためには z^+ と z^- の間に辺が必要であり, z が生成系に含まれなければならない .
- ii) 逆に \mathcal{F}_{Az^+} が 3 要素以上を含むならば, z^+ から z^- に移るのに他の要素を経由することができるから, z 自体を必ずしも用いなくてもよく, z を他の move の組合せでおきかえることができる .

- $4 \times 4 \times 4$ 表の場合 (“The $4 \times 4 \times 4$ challenge”) Hemmecke and Malkin (2006) . 計算時間は一週間 . 一意極小基底は 148,968 個の要素からなる . 対称性よりそれらは 15 種類の move に分類される .

1. $p_{111}p_{144}p_{414}p_{441} - p_{114}p_{141}p_{411}p_{444}$
2. $p_{111}p_{144}p_{334}p_{341}p_{414}p_{431} - p_{114}p_{141}p_{331}p_{344}p_{411}p_{434}$
3. $p_{111}p_{122}p_{134}p_{143}p_{414}p_{423}p_{432}p_{441} -$
 $p_{114}p_{123}p_{132}p_{141}p_{411}p_{422}p_{434}p_{443}$
4. $p_{111}p_{144}p_{324}p_{333}p_{341}p_{414}p_{423}p_{431} -$
 $p_{114}p_{141}p_{323}p_{331}p_{344}p_{411}p_{424}p_{433}$
5. $p_{111}p_{144}p_{234}p_{243}p_{323}p_{341}p_{414}p_{421}p_{433} -$
 $p_{114}p_{141}p_{233}p_{244}p_{321}p_{343}p_{411}p_{423}p_{434}$
6. $p_{111}p_{122}p_{133}p_{144}p_{324}p_{332}p_{341}p_{414}p_{423}p_{431} -$
 $p_{114}p_{123}p_{132}p_{141}p_{322}p_{331}p_{344}p_{411}p_{424}p_{433}$
7. $p_{111}p_{144}p_{222}p_{234}p_{243}p_{323}p_{341}p_{414}p_{421}p_{432} -$
 $p_{114}p_{141}p_{223}p_{232}p_{244}p_{321}p_{343}p_{411}p_{422}p_{434}$

8. $p_{111}p_{144}p_{222}p_{233}p_{324}p_{332}p_{341}p_{414}p_{423}p_{431} -$
 $p_{114}p_{141}p_{223}p_{232}p_{322}p_{331}p_{344}p_{411}p_{424}p_{433}$
9. $p_{111}p_{112}p_{133}p_{144}p_{223}p_{224}p_{232}p_{241}p_{314}p_{322}p_{413}p_{421} -$
 $p_{113}p_{114}p_{132}p_{141}p_{221}p_{222}p_{233}p_{244}p_{312}p_{324}p_{411}p_{423}$
10. $p_{111}p_{112}p_{133}p_{144}p_{224}p_{232}p_{243}p_{313}p_{322}p_{341}p_{414}p_{421} -$
 $p_{113}p_{114}p_{132}p_{141}p_{222}p_{233}p_{244}p_{312}p_{321}p_{343}p_{411}p_{424}$
11. $p_{111}p_{134}p_{143}p_{222}p_{233}p_{241}p_{314}p_{323}p_{342}p_{412}p_{424}p_{431} -$
 $p_{114}p_{133}p_{141}p_{223}p_{231}p_{242}p_{312}p_{324}p_{343}p_{411}p_{422}p_{434}$
12. $p_{111}p_{134}p_{143}p_{224}p_{232}p_{241}p_{314}p_{323}p_{342}p_{412}p_{421}p_{433} -$
 $p_{114}p_{133}p_{141}p_{221}p_{234}p_{242}p_{312}p_{324}p_{343}p_{411}p_{423}p_{432}$
13. $p_{111}^2 p_{124}p_{133}p_{144}p_{214}p_{223}p_{242}p_{313}p_{332}p_{341}p_{414}p_{424}p_{431} -$
 $p_{114}^2 p_{123}p_{131}p_{141}p_{213}p_{222}p_{244}p_{311}p_{333}p_{342}p_{411}p_{424}p_{432}$
14. $p_{111}^2 p_{124}p_{133}p_{144}p_{214}p_{232}p_{243}p_{312}p_{323}p_{341}p_{414}p_{422}p_{431} -$
 $p_{114}^2 p_{123}p_{131}p_{141}p_{212}p_{233}p_{244}p_{311}p_{322}p_{343}p_{411}p_{424}p_{432}$
15. $p_{111}^2 p_{133}p_{144}p_{223}p_{224}p_{232}p_{242}p_{313}p_{322}p_{341}p_{414}p_{422}p_{431} -$
 $p_{113}p_{114}p_{131}p_{141}p_{222}^2 p_{233}p_{244}p_{311}p_{323}p_{342}p_{411}p_{424}p_{432}$

($p_{ijk} = \alpha_{ij}\beta_{ik}\gamma_{jk}$, $1 \leq i, j, k \leq 4$, から出てきた関係!)

生成系の対称性

- $3 \times 3 \times 3$ 表 (あるいは $4 \times 4 \times 4$ 表) の対称性
 - 各変数の「水準」の入れ換え
 - 変数の入れ換え
 - 例: $4 \times 4 \times 4$ の場合であれば, 対称群の直積 $S_4 \times S_4 \times S_4 \times S_3$ がセルの集合 (不定元の集合) の並べ替えの形で作用している.
 - 前ページのリストは, 各軌道の代表元のリストである.
- 一般の $A : d \times q$ について, A の持っている対称性をどう定義するか?

- $S_q = S_{|\mathcal{I}|}$ はセルの並べ替えにより q 次元有理ベクトル空間 \mathbb{Q}^q に作用する .
- \mathbb{Q}^q の部分空間 L について S_q の L における setwise stabilizer を

$$G_L = \{g \in S_{|\mathcal{I}|} \mid gL = L\}$$

と定義する . (部分空間として不変)

- $\text{Ker}(A)$ における S_q の setwise stabilizer $G_{\text{Ker}(A)}$ を A の **不変群** と定義する .

- Graver 基底やユニバーサルグレブナー基底などの単項式順序に依存しない生成系は $G_{\text{Ker}(A)}$ の作用に関して不変な生成系となる .
- 統計のモデルに現れる配置 A は対称性の高いものが多い
- $4 \times 4 \times 4$ の計算例でも , 現状では , アルゴリズム自体では対称性を用いていない .
- Buchberger アルゴリズム等のなかで A の既知の対称性をどのように利用するかが一つの大きな課題

[16:55]

5. 配置の正規性と sequential importance sampling

これまでは $b = Ax$ の 定義域 \mathbb{N}^q の離散性を問題にしてきた．一方値域 \mathbb{N}^d の離散性はどうか？

配置の正規性とサンプリングの関連

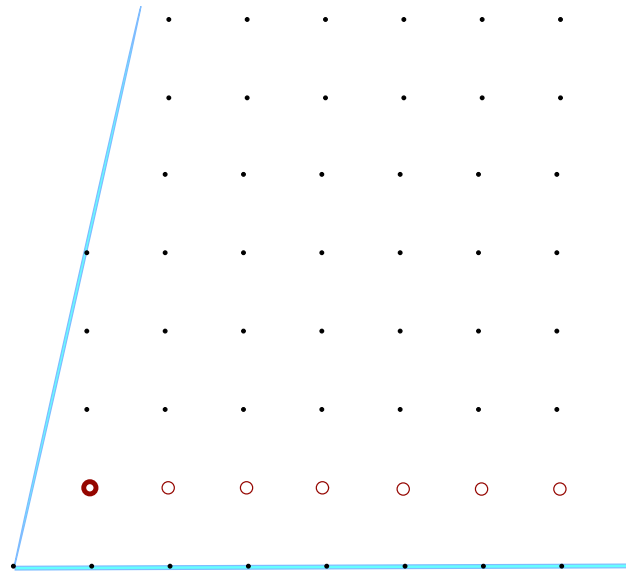
諸定義

- $C = \text{cone}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}_+^q\}$: 配置 A の列ベクトルの非負実一次結合のなす多面錐
- $Q = \{Ax \mid x \in \mathbb{N}^q\}$: 非負整数一次結合のなす半群

- $L = \{Ax \mid x \in \mathbb{Z}^q\}$: さらに負を許した整数一次結合のなす格子
- $Q_{\text{sat}} = L \cap C$: Q の “saturation”
- 一般に $Q \subset Q_{\text{sat}}$ であるが, ここで等号が成り立つ時 A は正規であるという.
- $H = Q_{\text{sat}} \setminus Q$ の要素を hole とよぶ. Hole とは C に属する格子点の中で逆もどりが許されれば到達できるが, 許されないとどうしても飛び越されてしまうような点である.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



$$H = \{(1, 1)^t + \alpha \cdot (1, 0)^t \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$$

は無限集合 .

Sequential importance sampling との関係

- 2元分割表の例 (再掲)

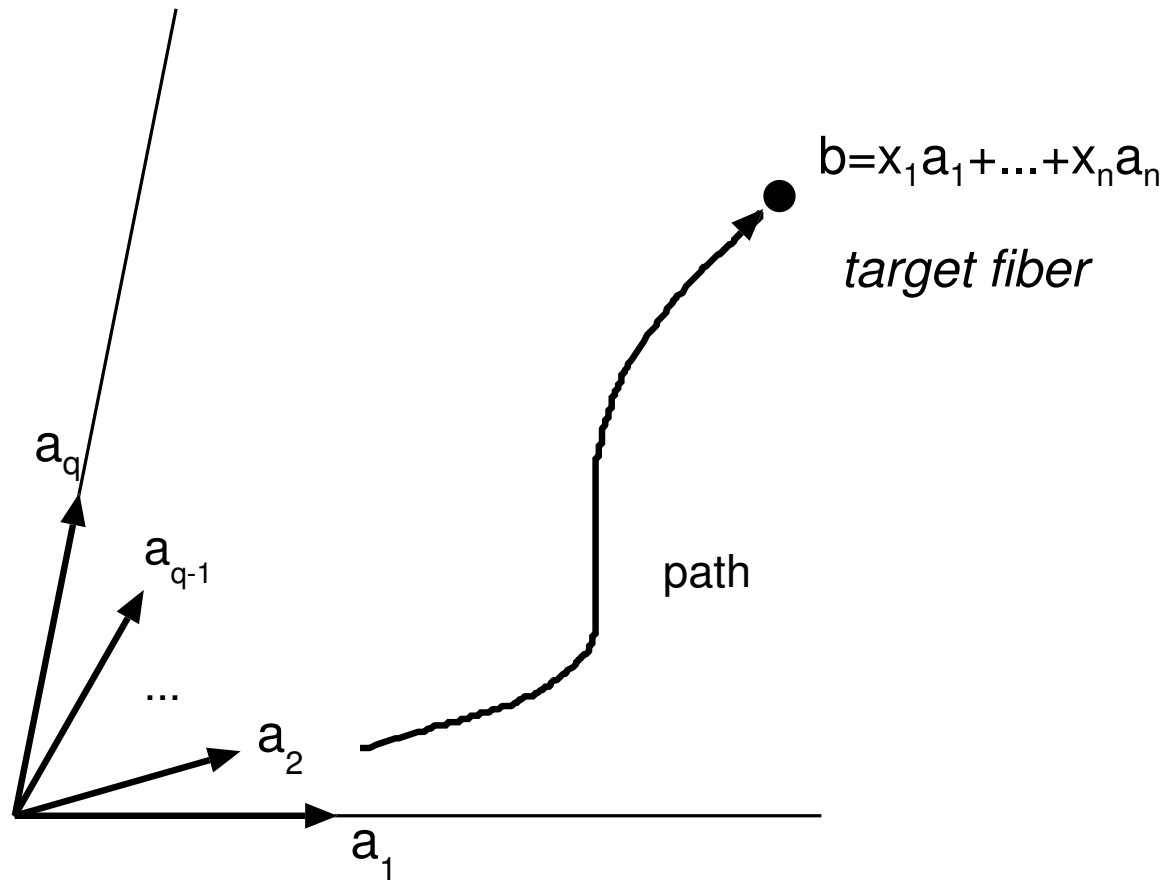
7	5	1	13
5	10	6	21
2	6	8	16
14	21	15	50

(5:済)	?	?	8
?	?	?	21
?	?	?	16
9	21	15	45

- 同じ周辺頻度を持つ表を抽出するために, いったん表を空にして, 左上からうめていく. 例えば $x_{11} = 5$ とし, 周辺を調整する.
- 以下同様に繰り返して表をうめることができる.

- マルコフ基底との比較

- マルコフ基底: 同一のファイバー内を動き, 部分的に観測値を入れ換える.
- sequential importance sampling: すべての観測値をいったん捨てて原点に戻り, 原点から再度目的のファイバーに達しようとする.



- 正規でない場合，最後のステップで hole にはまってしまい，後戻りを余儀なくされる可能性がある．

- 2元表ではこのようなことはおきない。
- 3元表の場合，例えば $3 \times 4 \times 6$ 以上のサイズの A が正規でないことがわかっている．つまり3元表は sequential importance sampling の観点からも困難をかかえている．
- 配置の正規性とグレブナー基底の関係も興味深い．

[17:05]

6. その他の話題

- 統計学における変換群論の利用の展開
 - 各軌道と一点でまじわる cross section を用いて柔軟な独立性を持つ分布族を構成できる．
- 超平面配置の理論の応用
 - ランキングデータの解析において超平面配置の理論が重要な役割をはたす．
 - 超平面配置の特性多項式を求めるのに「有限体法」が有用．有限体上のベクトル空間で，どの超平面にも載らない点の数を数える．
 - Ehrhart 多項式とも関連

- Ehrhart 多項式とチューブ法

- チューブ法は，Hotelling-Weyl の管状近傍定理に基づく体積計算の手法であり，ある種の確率計算に極めて有用．
- Ehrhart 多項式はチューブ公式の離散版と思われる．
- 領域を少しふくらませた時の体積の評価という点で共通性がある．

ご清聴ありがとうございました．